



*А.Б. Васильева  
Н.А. Тихонов*

# *ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

А. Б. Васильева,  
Н. А. Тихонов

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*ДОПУЩЕНО ГОСУДАРСТВЕННЫМ КОМИТЕТОМ СССР  
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ  
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ  
ВУЗОВ, ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТЯМ  
«ФИЗИКА» И «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»*

*Издательство  
Московского университета  
1989*

ББК 22.161.6

В19

УДК 517

*Рецензенты:*

кафедра высшей математики  
УДН им. Патриса Лумумбы,  
профессор В. А. Треногин

**Васильева А. Б., Тихонов Н. А.**

В19 Интегральные уравнения. — М.: Изд-во Моск. ун-та,  
1989. — 156 с.  
ISBN 5—211—00344—6.

Пособие знакомит с понятием интегрального уравнения, теоремой существования собственных значений и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Рассмотрены вопросы разложимости по собственным функциям, задача Штурма — Лиувилля, неоднородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода, уравнения типа Вольтерра. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода рассматриваются как некорректно поставленная задача, в связи с чем излагаются основы регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова. Приводятся некоторые сведения о численных методах теории интегральных уравнений. Излагаются также некоторые вопросы теории интегро-дифференциальных уравнений.

Для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Физика» и «Прикладная математика».

1602070100 (4309000000) —113

В 077 (02) — 89 81—89

ББК 22.161.6

ISBN 5—211—00344—6

© Издательство Московского  
университета, 1989 г.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>Глава 1. Введение</b> .....	6
§ 1. Понятие интегрального уравнения. Классификация интегральных уравнений .....	6
§ 2. Физические примеры .....	7
§ 3. Особенности постановок задач для уравнений Фредгольма. ....	14
<b>Глава 2. Существование и свойства собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного оператора</b> .....	16
§ 4. Вполне непрерывные операторы в бесконечномерном евклидовом пространстве .....	16
§ 5. Существование собственных векторов вполне непрерывного симметричного оператора .....	23
§ 6. Свойства собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного симметричного оператора .....	27
<b>Глава 3. Однородное уравнение Фредгольма второго рода</b> .....	31
§ 7. Собственные функции и собственные значения однородного уравнения Фредгольма второго рода .....	31
§ 8. Определение собственных значений и собственных функций по методу Келлога .....	36
§ 9. Вырожденные ядра .....	41
<b>Глава 4. Разложение по собственным функциям</b> .....	46
§ 10. Теорема Гильберта—Шмидта .....	46
§ 11. Повторные ядра .....	48
§ 12. Теорема Мерсера .....	52
§ 13. Ослабление требований на ядро .....	55
<b>Глава 5. Краевая задача на собственные значения (задача Штурма—Лиувилля)</b> .....	57
§ 14. Задача о колебаниях струны .....	57
§ 15. Исследование задачи Штурма—Лиувилля путем сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода .....	60
<b>Глава 6. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода</b> .....	68
§ 16. Случай симметричного ядра .....	68
§ 17. Случай «малого» $\lambda$ .....	75
§ 18. Теоремы Фредгольма .....	84
§ 19. Резольвента непрерывного несимметричного ядра при «больших» $\lambda$ .....	93
§ 20. Уравнение с ядром, зависящим от разности аргументов. ....	95
<b>Глава 7. Уравнения Вольтерра второго рода</b> .....	99
§ 21. Существование и единственность решения .....	99
§ 22. Резольвента для уравнения Вольтерра .....	102
§ 23. Уравнение Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов .....	105
<b>Глава 8. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода</b> .....	109
§ 24. Интегральное уравнение Фредгольма первого рода как некорректно поставленная задача .....	109
§ 25. Сглаживающий функционал и его свойства .....	113
§ 26. Построение приближенного решения уравнения Фредгольма первого рода .....	117

<i>Глава 9. Численные методы решения интегральных уравнений</i> .....	123
§ 27. Интегральные уравнения второго рода .....	123
§ 28. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода .....	127
<i>Глава 10. Некоторые сведения об интегро-дифференциальных уравнениях</i> .....	133
§ 29. Различные виды интегро-дифференциальных уравнений .....	133
§ 30. Физические примеры .....	134
§ 31. Интегро-дифференциальные уравнения с интегральным оператором типа Вольтерра .....	137
§ 32. Интегро-дифференциальные уравнения с интегральным оператором типа Фредгольма .....	142
§ 33. Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения .....	146
<i>Литература</i> .....	155
<i>Предметный указатель</i> .....	157

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу предлагаемого учебного пособия положен лекционный материал, который в течение ряда лет читается студентам второго курса физического факультета МГУ.

Пособие знакомит читателя с понятием интегрального уравнения и классификацией интегральных уравнений. Доказана теорема существования собственных значений и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Рассмотрены вопросы разложимости по собственным функциям, задача Штурма—Лиувилля, неоднородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода, интегральные уравнения типа Вольтерра, интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Приводятся некоторые сведения о численных методах теории интегральных уравнений. Указан ряд конкретных физических задач, приводящих к интегральным уравнениям.

Пособие ставит одной из своих целей приучить студентов применять методы функционального анализа при исследовании интегральных уравнений. Для этого введена глава, в которой излагаются основы теории вполне непрерывных операторов в бесконечномерном евклидовом пространстве. На основе этой теории доказано существование собственных значений и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Значительное место отводится уравнению Фредгольма первого рода, которое изучается как некорректно поставленная задача. Излагаются основы регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова.

Содержание предлагаемого пособия расширено по сравнению с читающимся курсом и освещает ряд вопросов, которые не входят в обязательную программу на физическом факультете. Так, в главе 10 излагаются некоторые сведения об интегро-дифференциальных уравнениях. Некоторые вопросы дополнительного характера включены в виде отдельных параграфов в соответствующие главы.

При написании настоящего пособия мы стремились к тому, чтобы материал по возможности легко воспринимался читателем. Поэтому изложение большей части рассмотренных вопросов проводится для случая вещественных непрерывных функций и одномерных интегралов. Авторы не вводят понятия пространства  $L_2$ , поскольку для строгого изложения материала при этом требуется интеграл Лебега, с которым большая часть студентов незнакома.

При изложении стандартных вопросов теории интегральных уравнений нами использовались уже имеющиеся учебники и пособия других авторов. Все они указаны в списке литературы.

При подготовке рукописи авторы неоднократно консультировались со своими коллегами В. Б. Гласко, А. В. Гончарским, А. Г. Яголой, И. А. Шишмаревым и пользуются случаем, чтобы выразить им искреннюю благодарность. Авторы также весьма признательны Н. Х. Розову, который просмотрел рукопись и сделал ряд ценных замечаний.

## § 1

ПОНЯТИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Например,

$$y(x) = \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad (1.1)$$

или

$$y(x) = \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (1.2)$$

Здесь  $K(x, s)$  и  $f(x)$  — заданные функции, а  $y(x)$  — искомое решение. Функция  $K(x, s)$  в приведенных соотношениях называется **ядром** интегрального уравнения.

Уравнения (1.1) и (1.2) относятся к линейным интегральным уравнениям. Встречаются также и нелинейные интегральные уравнения, например,

$$y(x) = \int_a^x F(x, s, y(s))ds + f(x).$$

В настоящем курсе изучаются только линейные интегральные уравнения.

Интегральные уравнения, рассматриваемые в настоящем курсе, классифицируются следующим образом:

а) если искомая функция содержится только под знаком интеграла, то уравнение называется **интегральным уравнением первого рода**. Такими уравнениями являются

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x) \quad (1.3)$$

или

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x). \quad (1.4)$$

Соотношения (1.1) и (1.2), в которых искомая функция содержится также и вне интегрального слагаемого, называются уравнениями *второго рода*;

б) если пределы интегрирования фиксированы, то интегральное уравнение называется уравнением *Фредгольма* (случаи (1.1) и (1.3)). Если же пределы интегрирования переменны (случаи (1.2) и (1.4)), то интегральное уравнение называется уравнением *Вольтерра*.

Формально уравнение Вольтерра можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, полагая, например, в (1.2)  $K(x, s) \equiv 0$  при  $s > x$ . Однако физические задачи, приводящие к уравнениям Вольтерра и Фредгольма, а также свойства решений этих уравнений существенно различны. Поэтому уравнения Вольтерра выделяют в особый тип уравнений;

в) уравнения (1.1) — (1.4) называются *однородными*, если  $f(x) \equiv 0$ . В противном случае эти уравнения называются *неоднородными*.

Интегрирование в интегральном уравнении может производиться как по отрезку прямой, так и по некоторой области большей размерности. От этого приведенная выше классификация не меняется. Пусть, например, задана область  $\Omega$  в трехмерном пространстве и функции  $K(M, P)$ ,  $f(M)$ , определенные при  $M \in \Omega$  и  $P \in \Omega$ . Тогда соотношение

$$y(M) = \int_{\Omega} K(M, P)y(P)d\sigma_P + f(M),$$

где  $d\sigma_P$  — элемент области  $\Omega$ , содержащий точку  $P$ , представляет собой неоднородное уравнение Фредгольма *второго рода*.

## § 2.

### ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ

Многие задачи математической физики приводят к линейным интегральным уравнениям. Рассмотрим некоторые примеры.

1. К уравнению Вольтерра первого рода приводит задача определения потенциальной энергии поля, в котором частица совершает колебательное движение, по известной зависимости периода колебаний частицы от ее энергии [18]. А именно, пусть частица совершает колебания в поле с потенциальной энергией  $u(x)$ , которая предполагается четной функцией, монотонно возрастающей при  $x > 0$ . Пусть  $E$  — энергия частицы, а  $m$  — ее масса. Тогда в силу закона сохранения энергии  $\frac{m\dot{x}^2}{2} + u(x) = E$ . Интегрируем это уравнение, разделяя переменные. Имеем  $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - u(x))}$ .



Отсюда  $t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}} + \text{const.}$  Считая  $u|_{x=0} = 0$ , получим следующее выражение для периода колебаний:  $T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_0(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}}$ , где  $x_0(E)$  — корень уравнения  $u(x) = E = 0$ . Переходя под интегралом к переменной  $du$ , получим

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^E \frac{\Phi(u)du}{\sqrt{E - u}}, \quad (1.5)$$

где  $\Phi(u) = \frac{dx}{du}(u)$ . Пусть функция  $u(x)$  неизвестна, но известна зависимость  $T(E)$  для некоторого интервала значений  $E$ . Тогда задача определения функции  $u(x)$  сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода (1.5) относительно функции  $\Phi(u)$ . Определив  $\Phi(u)$ , находим нужную зависимость  $u(x)$  из условий  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{1}{\Phi(u)}$ ,  $u(0) = 0$ .

2. Уравнения Вольтерра второго рода типичны при описании физических процессов, связанных с явлениями последовательности. В этих уравнениях переменная  $x$  обычно обозначает время. Тогда состояние системы, характеризуемое функцией  $y(x)$ , определяется внешним воздействием  $f(x)$  и зависит от состояния системы в предшествующие моменты времени. Ядро  $K(x, s)$  описывает величину последовательности состояния системы в момент  $s$  на состояние системы в момент  $x > s$ .

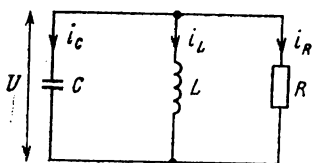


Рис. 1

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 1. Пусть в катушке индуктивности не проявляется явление гистерезиса. Тогда поток индукции в катушке  $\Phi$  связан с током  $i_L$  соотношением  $\Phi = L \cdot i_L$ . Согласно известным формулам электродинамики имеем

$$Ri_R = u, \quad \frac{1}{C} i_C = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d\Phi}{dt} = u.$$

Используя закон Кирхгофа  $i_R + i_C + i_L = 0$ , приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно  $u$ :

$$\frac{u}{L} + \ddot{u}C + \dot{u} = 0.$$

Пусть теперь катушка снабжена магнитным сердечником, в котором проявляется гистерезис. Тогда вместо соотношения  $\Phi = L \cdot i_L$  нужно использовать более сложное, учитывающее зависимость  $\Phi$  не только от значения  $i_L$  в момент  $t$ , но и в предшествующие моменты времени (эффект последействия). Это видоизмененное соотношение таково:

$$\Phi(t) = L \cdot i_L + \int_{t_0}^t M(t - \tau) i_L(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Здесь  $M(t - \tau)$  — функция, учитывающая влияние значения  $i_L$  в момент  $\tau$  на величину  $\Phi$  в момент  $t$  и определяемая обычно эмпирическим способом.

Имеем

$$i_L = -i_R - i_C = -\frac{u}{R} - C\dot{u}.$$

Отсюда

$$u(t) = u(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{RC}} - \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \frac{i_L(\tau)}{C} d\tau$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi = u(t_0) \int_{t_0}^t e^{-\frac{\xi-t_0}{RC}} d\xi - \\ &- \int_{t_0}^t d\xi \int_{t_0}^{\xi} e^{-\frac{\xi-\tau}{RC}} \frac{i_L(\tau)}{C} d\tau = f(u(t_0), t) + \\ &+ \int_{t_0}^t \tilde{K}(t - \tau) i_L(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{K}(t - \tau) = - \int_{\tau}^t e^{-\frac{\xi-\tau}{RC}} \frac{1}{C} d\xi.$$

Подставляя полученное выражение для  $\Phi$  в уравнение, связывающее  $\Phi$  и  $i_L$ , получим

$$\begin{aligned} f(u(t_0), t) + \int_{t_0}^t \tilde{K}(t - \tau) i_L(\tau) d\tau &= L i_L(t) + \\ &+ \int_{t_0}^t M(t - \tau) i_L(\tau) d\tau \end{aligned}$$

или окончательно для  $i_L(t)$  имеем

$$i_L(t) = \int_{t_0}^t K(t-\tau) i_L(\tau) d\tau + f(u(t_0), t) \frac{1}{L},$$

где  $K(\xi) = [\tilde{K}(\xi) - M(\xi)] \frac{1}{L}$ . Таким образом, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

К уравнению (1.2) сводится также задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

$$\begin{cases} \varphi^{(n)} + p_1(x)\varphi^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\varphi = f(x), \\ \varphi(a) = 0, \varphi'(a) = 0, \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Действительно, положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x y(s)(x-s)^{n-1} ds, \quad (1.8)$$

где  $y(x)$  — новая неизвестная функция. Дифференцируя выражение (1.8)  $n$  раз, имеем

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{(n-1-k)!} \int_a^x y(s)(x-s)^{n-1-k} ds \quad (1 \leq k \leq n-1);$$

$$\varphi^{(n)}(x) = y(x).$$

При этом, очевидно, выполнены условия  $y^{(k)}(a) = 0$  для  $1 \leq k \leq n-1$ . Подставляя найденные выражения для  $\varphi^{(k)}(x)$  в левую часть уравнения (1.7), получим

$$y(x) + \int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad (1.9)$$

$$\text{где } K(x, s) = p_1(x) \frac{x-s}{1!} + \dots + p_n(x) \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, задача (1.7) свелась к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода (1.9). Определив из (1.9) функцию  $y(x)$ , находим  $\varphi(x)$  согласно (1.8).

3. Уравнения Фредгольма первого рода (1.3) являются типичными при математической обработке данных эксперимента. Задача состоит в следующем. Изучается явление, характеристики  $y(x)$  которого недоступны для непосредственного измерения. Можно измерить косвенные проявления процесса — функцию  $f(x)$ . Для изучаемого явления строится некоторая теоретическая модель, определяющая функцию

$K(x, s)$ . Тогда интересующие нас характеристики могут быть найдены из интегрального уравнения (1.3).

Приведем примеры конкретных задач подобного типа.

а. К интегральному уравнению Фредгольма первого рода приводят задачи гравиразведки полезных ископаемых [26]. Рассмотрим простейший случай. Пусть в слое  $z \geq h$ , где  $z$  — глубина под поверхностью Земли, расположены источники аномального гравитационного поля, а при  $0 < z < h$  их нет. Если бы было известно поле при  $z = h$ , т. е. на границе области, в которой расположены источники, то можно было бы выявить их структуру. Однако поле вблизи источников недоступно прямому измерению. Поэтому возникает задача его определения по данным наблюдений на дневной поверхности.

Выведем соответствующее уравнение, ограничиваясь ради краткости двумерной задачей. Обозначим через  $v(x)$ , где  $x$  — горизонтальная координата, потенциал гравитационного поля при  $z = h$ . Тогда потенциал поля  $u(x, z)$  в области  $0 < z < h$ , где нет источников, является гармонической функцией. Для него справедливы соотношения

$$\Delta u = 0, \\ u(x, h) = v(x) \quad (0 < z < h, -\infty < x < \infty).$$

Решение такой задачи дается интегральной формулой Пуассона [27]

$$u(x, z) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + (z - h)^2}.$$

На поверхности Земли, т. е. при  $z = 0$ , величина  $u(x, 0)$  может быть измерена. Обозначим  $u(x, 0) = f(x)$ . Тогда для определения искомой функции  $v(x)$  получаем уравнение Фредгольма первого рода

$$\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + h^2} = f(x).$$

б. К интегральному уравнению Фредгольма первого рода приводит задача восстановления размытого изображения. Пусть при фотографировании объекта его изображение было сфокусировано не в плоскости эмульсионного слоя пленки, а на некотором малом расстоянии  $h$  от него (рис. 2). Обозначим: (А) —

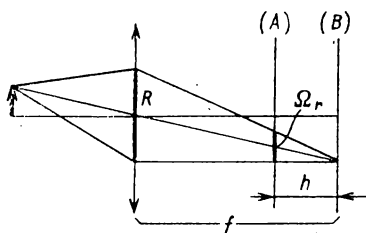


Рис. 2

плоскость фотопленки;  $(B)$  — плоскость изображения объекта;  $R$  — радиус объектива;  $f$  — расстояние от линзы до плоскости  $(B)$ ;  $x$  и  $y$  — координаты в плоскостях  $(A)$  и  $(B)$ ;  $v(x, y)$  — освещенность в плоскости  $(A)$ ;  $u(x, y)$  — освещенность в плоскости  $(B)$ ;  $S$  — поверхность фотокадра. Тогда в рамках геометрической оптики получаем, что пучок лучей, сходящийся в точку на плоскости  $(B)$ , в плоскости  $(A)$  равномерно осветит круг  $\Omega_r$  радиуса  $r = R h / f$ .

Аналитически эта ситуация описывается так: сходящемуся в точку с координатами  $(\xi, \eta)$  на плоскости  $(B)$  световому пучку, несущему единичный световой поток, соответствует освещенность  $u_0(x, y) = \delta(x - \xi, y - \eta)$ ; при этом в плоскости  $(A)$  получим освещенность  $v_0(x, y) = F[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]$ .

Здесь  $\delta$  — дельта-функция, а  $F[a] = \begin{cases} 0, & \text{если } a > r^2, \\ \frac{1}{\pi r^2}, & \text{если } r^2 > a > 0. \end{cases}$  От-

сюда распределенной освещенности  $u(x, y) = \int_S \delta(x - \xi, y - \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta$  в плоскости  $(B)$  соответствует освещенность в плоскости  $(A)$ :

$$v(x, y) = \int_S F[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Это соотношение является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, определяющим  $u(x, y)$  при заданной  $v(x, y)$ . Измеряя на фотографии значение функции  $v(x, y)$  и решая полученное интегральное уравнение, можно восстанавливать неразмытое изображение  $u(x, y)$ . Результаты такой обработки изображения приведены в качестве иллюстрации в § 28.

4. К однородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (1.1) приводят задачи о собственных колебаниях систем, т. е. колебаниях при отсутствии внешней силы. Рассмотрим, например, задачу о малых поперечных свободных колебаниях струны переменной плотности  $\rho(x)$ . Пусть концы струны закреплены. Тогда для поперечных отклонений струны  $u(x, t)$  выполнено:

$$\rho(x) u_{tt} = A^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (1.10)$$

Поставим задачу определить профиль струны при свободных гармонических колебаниях, т. е. будем искать решения вида  $u(x, t) = y(x) \sin \omega t$ . Значения  $\omega$ , при которых существует решение такого типа, называются собственными частотами колебаний струны.

Для  $y(x)$  из (1.10) получаем задачу

$$y'' = -\frac{\omega^2}{A^2} \rho y, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (1.11)$$

Рассматривая правую часть уравнения (1.11) как неоднородность, записываем решение задачи (1.11) в форме

$$y(x) = -\frac{\omega^2}{A^2} \int_0^l G(x, s) \rho(s) y(s) ds, \quad (1.12)$$

где  $G(x, s)$  — функция Грина [25]. Таким образом, поставленная задача свелась к определению тех значений  $\omega$ , при которых существует нетривиальное решение однородного уравнения Фредгольма второго рода (1.12), и нахождению этих решений.

5. Пусть теперь струна находится под воздействием внешней нагрузки, меняющейся по гармоническому закону  $F(x, t) = B(x) \sin \omega t$ , где  $\omega$  — заданный параметр,  $B(x)$  — заданная амплитуда. Тогда

$$\rho(x) u_{tt} = A^2 u_{xx} - B(x) \sin \omega t,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Будем искать решение в виде  $u(x, t) = y(x) \sin \omega t$ . Для функции  $y(x)$  получим интегральное уравнение

$$y(x) = -\frac{\omega^2}{A^2} \int_0^l G(x, s) \rho(s) y(s) ds + f(x), \quad (1.13)$$

где  $f(x) = \frac{1}{A^2} \int_0^l G(x, s) B(s) ds$  — известная функция. Интегральное уравнение (1.13) является неоднородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Рассмотрим еще один пример, приводящий к интегральному уравнению того же типа.

В электростатике, гидростатике и многих других разделах физики стационарные по времени поля в отсутствие источников описываются уравнением Лапласа. При этом часто ставится задача определения функции  $u$ , удовлетворяющей соотношениям

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \\ u|_{M \in \Sigma} = \Phi(M), \end{cases} \quad M \in G, \quad (1.14)$$

где  $G$  — область пространства, ограниченная поверхностью  $\Sigma$ ;  $M$  — точка, принадлежащая  $G$ ;  $\varphi(M)$  — заданная функция;  $u(M)$  — искомое решение.

В курсах математической физики [1,27] показано, что решение задачи (1.14) дается выражением

$$u(M) = \int_{\Sigma} \frac{\cos \psi_{MP}}{R_{MP}^2} v(P) d\sigma_P, \quad M \in G, \quad (1.15)$$

где  $P \in \Sigma$ ;  $R_{MP}$  — расстояние между точками  $M$  и  $P$ ;  $d\sigma_P$  — элемент поверхности  $\Sigma$ , содержащий точку  $P$ ;  $\psi_{MP}$  — угол между вектором  $\vec{MP}$  и нормалью к поверхности  $\Sigma$ , восстановленной из точки  $P$  внутрь области  $G$ ;  $v(P)$  — некоторая функция. Эта функция заранее неизвестна, но может быть найдена из следующего неоднородного уравнения Фредгольма второго рода:

$$v(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\cos \psi_{MP}}{R_{MP}^2} v(P) d\sigma_P + \varphi(M), \quad M \in \Sigma. \quad (1.16)$$

Таким образом, определение искомой функции  $u(M)$  сводится к решению интегрального уравнения (1.16) с последующим использованием выражения (1.15).

### § 3.

#### ОСОБЕННОСТИ ПОСТАНОВОК ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Пример, разобранный в п. 4 предыдущего параграфа, показывает, что в однородном интегральном уравнении Фредгольма второго рода может содержаться неизвестный параметр (в (1.12) это параметр  $\omega$ ), который выбирается так, чтобы однородное уравнение имело нетривиальное решение (тривиальное решение однородное уравнение Фредгольма имеет всегда). Поэтому и в общем случае однородное уравнение Фредгольма второго рода записывается в виде

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds, \quad (1.17)$$

где  $\lambda$  — неизвестный параметр.

Значения параметра  $\lambda$ , при которых уравнение (1.17) имеет нетривиальное решение, называются *собственными значениями* интегрального уравнения (1.17) (или *собственными значениями ядра*  $K(x, s)$ ), а отвечающие этим значениям  $\lambda$  нетривиальные решения называются *собственными функциями* интегрального уравнения (1.17) (*собственными функциями ядра*).

Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода также принято записывать с параметром

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad (1.18)$$

но здесь  $\lambda$  обычно является заданной величиной. Как мы увидим ниже, если  $\lambda$  совпадает с одним из собственных значений ядра  $K(x, s)$ , то уравнение (1.18) имеет решение не при любой  $f(x)$ . Применительно к струне это означает, что если частота  $\omega$  возмущающей гармонической силы  $B(x)\sin\omega t$  совпадает с собственной частотой колебаний струны, то возникает явление резонанса, и решения вида  $u(x, t) = y(x)\sin\omega t$ , вообще говоря, не существует.

Заканчивая вводную часть, отметим, что основные свойства решений интегральных уравнений в одномерном случае (когда интегрирование производится по отрезку) и в многомерном случае (когда в уравнениях фигурируют поверхностные или объемные интегралы) одинаковы. В то же время одномерный случай проще с точки зрения восприятия материала, поэтому в настоящей книге изучается этот случай, т. е. уравнения (1.2), (1.4), (1.17), (1.18).



# СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРА

## § 4.

## ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**1. Евклидово пространство.** Для изучения вопроса существования собственных значений и собственных функций одно-родного интегрального уравнения Фредгольма второго рода удобно воспользоваться аппаратом функционального анализа, который мы сейчас изложим.

Будем исходить из понятия бесконечномерного вещественного линейного пространства  $H$ . Понятие линейного пространства введено в курсе линейной алгебры (см., например [15]). Элементы линейного пространства называются векторами или точками.

**Определение.** *Линейное пространство  $H$  называется евклидовым, если каждой паре точек  $y \in H, z \in H$  сопоставлено вещественное число, называемое скалярным произведением векторов  $y$  и  $z$  (обозначается:  $(y, z)$ ) так, что выполнены следующие требования:*

- 1)  $(y, z) = (z, y)$ ;
- 2)  $(y, z_1 + z_2) = (y, z_1) + (y, z_2)$ ;
- 3)  $(\lambda y, z) = \lambda(y, z)$  ( $\lambda$  — любое вещественное число);
- 4)  $(y, y) \geq 0$ , причем равенство нулю имеет место в том и только в том случае, когда  $y=0$ .

В дальнейшем под  $H$  будем подразумевать бесконечномерное евклидово пространство.

**Определение.** *Линейное пространство  $H$  называется нормированным, если каждому элементу  $y \in H$  сопоставлено вещественное число, называемое нормой вектора  $y$  (обозначается  $\|y\|$ ), так что выполнены следующие требования:*

- 1)  $\|y\| \geq 0$ , причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда  $y=0$ ;
- 2)  $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$  ( $\lambda$  — любое вещественное число);
- 3)  $\|y + z\| \leq \|y\| + \|z\|$ .

Наличие скалярного произведения позволяет ввести норму вектора  $y$  следующим образом [15]:

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)}. \quad (2.1)$$

Тем самым евклидово пространство можно рассматривать как нормированное.

Справедливо следующее неравенство, называемое *неравенством Коши—Буняковского* (см. [15]):

$$|(y, z)| \leq \|y\| \|z\|. \quad (2.2)$$

При этом равенство в (2.2) имеет место тогда и только тогда, когда  $y = \alpha z$ , где  $\alpha$  — число.

Убедимся теперь, что евклидово пространство  $H$  можно рассматривать как метрическое. Напомним [25], что *метрическим пространством называется пространство, в котором каждой паре элементов  $y, z$  поставлено в соответствие число  $\rho(y, z)$ , называемое расстоянием между элементами  $y$  и  $z$ , так что имеют место следующие свойства:*

1)  $\rho(y, z) \geq 0$ , причем  $\rho(y, z) = 0$  тогда и только тогда, когда  $y = z$ ;

2)  $\rho(y, z) = \rho(z, y)$  (свойство симметрии);

3)  $\rho(y, z) \leq \rho(y, u) + \rho(u, z)$  (неравенство треугольника).

Чтобы убедиться, что пространство  $H$  может быть сделано метрическим, введем расстояние  $\rho(y, z)$  между элементами  $y \in H$  и  $z \in H$  по формуле

$$\rho(y, z) = \|y - z\|. \quad (2.3)$$

При этом свойства 1) — 3) расстояния легко следуют соответственно из свойств 1) — 3) нормы. Получим, например, неравенство треугольника. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(y, z) = \|y - z\| &= \|y - u + u - z\| \leq \|y - u\| + \\ &+ \|u - z\| = \rho(y, u) + \rho(u, z). \end{aligned}$$

Рассмотрим бесконечномерное линейное пространство, элементами которого являются заданные на сегменте  $[a, b]$  непрерывные функции, и введем скалярное произведение, положив

$$(y, z) = \int_a^b y(x)z(x)dx \quad (2.4)$$

(в порядке упражнения предлагается проверить самостоятельно, что выполнены свойства 1) — 4) скалярного произведения).

Будем обозначать построенное таким образом бесконечномерное евклидово пространство через  $h[a, b]$ .

Пользуясь понятием нормы, можно ввести понятие сходящейся последовательности элементов.

**Определение.** Будем говорить, что последовательность  $y_n \in H$  сходится к некоторому элементу  $y \in H$ , если для  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists N(\varepsilon)$ , что при  $n > N(\varepsilon)$  выполнено неравенство  $\|y_n - y\| < \varepsilon$ .

Элемент  $y$  называется пределом последовательности  $y_n$ . Будем применять обычное обозначение:  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  или  $y_n \rightarrow y$ .

**Лемма 2.1** (о непрерывности нормы). Если  $y_n \rightarrow y$ , то  $\|y_n\| \rightarrow \|y\|$ .

**Доказательство.** Воспользуемся неравенством треугольника  $\|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\|$ , откуда при  $z = 0$  следует  $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\|$ ,  $\|y - x\| = \|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$ , т. е.  $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$ . Полагая теперь  $x = y_n$ , получим  $|\|y\| - \|y_n\|| \leq \|y - y_n\|$ , откуда сразу следует утверждение леммы.

## 2. Линейный оператор в пространстве $H$ .

**Определение.** Пусть любому элементу  $y \in H$  поставлен в соответствие по определенному закону элемент  $z \in G$  ( $G$  — некоторое пространство, вообще говоря, отличное от  $H$ ). Тогда говорят, что в пространстве  $H$  задан оператор  $A$ , и обозначают  $z = Ay$ .

В данной главе мы будем рассматривать операторы, отображающие элементы пространства  $H$  снова в элементы того же пространства  $H$ .

**Определение:** Оператор  $A$  называется линейным, если

$$1) A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2;$$

$$2) A(\alpha y) = \alpha \cdot Ay \quad (\alpha — вещественное число).$$

Пусть  $y(x) \in h[a, b]$ . Зададим функцию  $K(x, t)$ , непрерывную по совокупности аргументов при  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$ . Определим оператор  $A$  (т. е. функции  $y(x) \in h[a, b]$  поставим в соответствие функцию  $z(x) \in h[a, b]$ ) следующим образом:

$$z(x) = Ay = \int_a^b K(x, t) y(t) dt. \quad (2.5)$$

В силу непрерывности  $K(x, t)$  функция  $z(x)$  действительно принадлежит  $h[a, b]$ . Оператор, определяемый формулой (2.5), называется оператором Фредгольма. Оператор Фредгольма, очевидно, является линейным оператором.

**Определение.** Вектор  $y \neq 0$  называется собственным вектором оператора  $A$ , если имеет место соотношение

$$Ay = \Lambda y, \quad (2.6)$$

где  $\Lambda$  — некоторое вещественное число. Число  $\Lambda$  называется собственным значением оператора  $A$ , отвечающим собственному вектору  $y$ .

Рассмотрим оператор Фредгольма (2.5). Для оператора Фредгольма соотношение (2.6) имеет вид

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = \Lambda y(x).$$

Сравнивая это с (1.17), мы видим, что величина  $\lambda$ , которую мы определили как собственное значение интегрального уравнения Фредгольма (1.17), связана с  $\Lambda$  соотношением  $\lambda = 1/\Lambda$ . Имея в виду приложение развиваемой в данной главе теории операторов к исследованию интегральных уравнений, мы будем интересоваться отличными от нуля собственными значениями  $\Lambda$ .

**Определение.** Нормой оператора  $A$  (обозначается  $\|A\|$ ) называется неотрицательное число, определяемое следующим образом:

$$\|A\| = \sup \|Ay\| \quad \text{при} \quad \|y\| = 1.$$

Если существует  $\|A\|$ , то оператор называется *ограниченным*. В противном случае оператор называется *неограниченным*. (В этом случае условно говорят, что  $\|A\| = \infty$ .)

**Теорема 2.1.** Если  $K(x, t)$  является непрерывной по совокупности аргументов функцией при  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$ , то оператор Фредгольма (2.5) является ограниченным в  $h[a, b]$  оператором.

Доказательство. Из (2.5) следует, что

$$\|Ay\|^2 = \|z\|^2 = \int_a^b z^2(x) dx = \int_a^b dx \left[ \int_a^b K(x, t) y(t) dt \right]^2.$$

Но согласно неравенству Коши—Буняковского

$$\left[ \int_a^b K(x, t) y(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b K^2(x, t) dt \int_a^b y^2(t) dt = \int_a^b K^2(x, t) dt,$$

так как  $\|y\|^2 = \int_a^b y^2(t) dt = 1$ . Таким образом,

$$\|Ay\|^2 \leq \int_a^b dx \int_a^b K^2(x, t) dt = \text{const.}$$

Отсюда следует (см. [13]) существование  $\sup \|Ay\|$  при  $\|y\| = 1$ , т. е. ограниченность оператора Фредгольма. Теорема доказана.

Примером неограниченного оператора в  $h$  является оператор дифференцирования  $D$ . Оператор  $D$  определен не на всем  $h$ , а в подпространстве непрерывно дифференцируемых функций.

Рассмотрим в  $h[0, \pi]$  последовательность непрерывно дифференцируемых функций, принадлежащих единичной сфере (т. е. таких, для которых  $\|y_n\|^2 = \int_0^\pi y_n^2(x) dx = 1$ ), а именно

последовательность  $y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ . Тогда  $Dy_n = \frac{d}{dx} y_n(x) =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \cos nx \text{ и } \|Dy\|^2 = \int_0^\pi \frac{2}{\pi} n^2 \cos^2 nx \, dx = n^2 \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что не существует  $\sup \|Dy\|$  при  $\|y\|=1$ , т. е. оператор  $D$  является неограниченным.

**Теорема 2.2.** Для ограниченного линейного оператора  $A$  и любого элемента  $y \in H$  имеет место неравенство

$$\|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|y\|. \quad (2.7)$$

Действительно, пусть  $y \neq 0$ . Тогда  $y/\|y\|$  есть единичный вектор и, следовательно,  $\left\| A \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \|A\|$ . Преобразуем левую часть этого неравенства, пользуясь линейностью  $A$ . Получим  $\frac{1}{\|y\|} \|Ay\| \leq \|A\|$ . Умножая полученное неравенство на  $\|y\|$ , приходим к (2.7).

Если  $y=0$ , то  $\|y\|=0$  и  $Ay=0$  (см. определение линейного оператора) и, следовательно, (2.7) также справедливо (обрашается в равенство). Теорема доказана.

В дальнейшем в данной главе мы всюду будем считать  $A$  линейным оператором.

### 3. Непрерывный и вполне непрерывный оператор.

**Определение:** Оператор  $A$  называется непрерывным в точке  $y$ , если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$  такое, что из неравенства  $\|y - z\| < \delta(\varepsilon)$  следует неравенство  $\|Ay - Az\| < \varepsilon$ .

Если оператор  $A$  непрерывен при  $\forall y \in H$ , то будем говорить, что оператор является непрерывным в  $H$  или, короче, просто непрерывным.

**Замечание.** Это же определение можно в полной аналогии с понятием непрерывной функции сформулировать на языке последовательностей: оператор  $A$  называется непрерывным в точке  $y$ , если какова бы ни была последовательность  $y_n \rightarrow y$  (напомним, что это значит  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ ), соответствующая последовательность  $Ay_n$  имеет пределом  $Ay$  (т. е.  $\|Ay_n - Ay\| \rightarrow 0$ ).

**Теорема 2.3.** Ограниченный оператор является непрерывным.

Действительно:  $\|Ay - Az\| = \|A(y - z)\| \leq \|A\| \cdot \|y - z\| < \varepsilon$  при  $\|y - z\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \delta(\varepsilon)$ .

Справедливо и обратное утверждение:

**Теорема 2.4.** Непрерывный оператор является ограниченным.

**Доказательство.** Допустим противное, т. е. допустим, что оператор ограниченным не является. Это значит, что существует последовательность  $y_n$  такая, что  $\|y_n\|=1$ , а  $\|Ay_n\| > n$ . Тогда  $\left\| A \frac{y_n}{n} \right\| = \frac{1}{n} \|Ay_n\| > 1$  и, таким образом,

$\left\| A \frac{y_n}{n} - A0 \right\| > 1$ , в то время как  $\left\| \frac{y_n}{n} - 0 \right\| = \frac{1}{n} \|y_n\| \rightarrow 0$ , что

противоречит непрерывности оператора  $A$ . Теорема доказана.

**Определение.** Последовательность  $y_n \in H$  будем называть ограниченной, если существует не зависящая от  $n$  постоянная  $C$  такая, что  $\|y_n\| < C$ .

**Определение.** Последовательность  $y_n \in H$  будем называть компактной в  $H$ , если из любого бесконечного множества ее элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу  $y \in H$ .

**Определение.** Оператор  $A$  называется вполне непрерывным в  $H$ , если, какова бы ни была ограниченная последовательность векторов  $y_n$ , соответствующая последовательность  $Ay_n$  является компактной в  $H$ .

**Теорема 2.5.** *Вполне непрерывный оператор является ограниченным.*

**Доказательство.** Будем рассуждать от противного. Пусть оператор  $A$  не является ограниченным. Тогда существует последовательность  $y_n$  такая, что  $\|y_n\| = 1$ , а  $\|Ay_n\| \rightarrow \infty$ . В силу полной непрерывности  $A$  из последовательности  $z_n = Ay_n$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $z_{n_k} \rightarrow z$ . С одной стороны,  $\|z_{n_k}\| \rightarrow \|z\|$ , величина которой ограничена. С другой,  $\|z_{n_k}\| \rightarrow \infty$ , поскольку  $z_{n_k}$  является подпоследовательностью последовательности  $Ay_n$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

**Следствие.** *Вполне непрерывный оператор является непрерывным.*

**Замечание.** Утверждение, обратное к теореме 2.4, вообще говоря, несправедливо. Рассмотрим в пространстве  $h[a, b]$  оператор  $Ay = 1 \cdot y = y$ . Этот оператор, очевидно, ограничен, однако вполне непрерывным не является. Рассмотрим последовательность  $y_n$  ограниченную, но некомпактную. Тогда оператор  $A$  оставит ее некомпактной. Например, пусть

$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sin nx & \left( 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{n} \right), \\ 0 & \left( \frac{2\pi}{n} \leq x \leq 1 \right). \end{cases}$$

При этом

$$\|y_n\|^2 = \int_0^1 y_n^2 dx = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{n}{\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \alpha d\alpha}{\pi} = 1.$$

Допустим, что существует подпоследовательность  $Ay_{n_k} = y_{n_k}$ , сходящаяся в смысле нормы в  $h[0, 1]$ , т. е. в среднем к некоторой непрерывной функции  $y(x)$ . Имеем тогда для любого сколь угодно малого фиксированного  $\delta$

$$\int_0^\delta [y_{n_k}(x) - y(x)]^2 dx \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Но

$$\int_0^\delta [y_{n_k} - y]^2 dx = \int_0^\delta y_{n_k}^2 dx - 2 \int_0^\delta y_{n_k} y dx + \int_0^\delta y^2 dx.$$

Здесь, начиная с некоторого достаточно большого  $k$ , первое слагаемое равно 1, а третье как угодно мало вместе с  $\delta$  в силу ограниченности  $y(x)$ . Кроме того,

$$\left| \int_0^\delta y_{n_k} y dx \right| \leq \sqrt{\int_0^\delta y_{n_k}^2 dx} \sqrt{\int_0^\delta y^2 dx} = \sqrt{\int_0^\delta y^2 dx}$$

и, следовательно, второе слагаемое тоже как угодно мало. Таким образом, мы получим противоречие с (2.8).

**Теорема 2.6.** Если ядро  $K(x, t)$  непрерывно при  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$ , то оператор Фредгольма (2.5) является вполне непрерывным.

Доказательство. Имеем

$$z_n = Ay_n = \int_a^b K(x, t) y_n(t) dt.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$|z_n(x)| \leq \sqrt{\int_a^b K^2(x, t) dt} \sqrt{\int_a^b y_n^2(t) dt}.$$

Если  $\|y_n\| \leq C$ , то  $|z_n(x)| \leq \bar{K}C \sqrt{b-a}$ , где  $\bar{K} = \sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq t \leq b}} |K(x, t)|$

(существует в силу непрерывности  $K(x, t)$ ). Полученное неравенство означает, что последовательность  $z_n(x)$  является равномерно ограниченной на  $[a, b]$ . Докажем, что эта последовательность является равномерно непрерывной. Имеем

$$z_n(x_1) - z_n(x_2) = \int_a^b [K(x_1, t) - K(x_2, t)] y_n(t) dt.$$

Следовательно,

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| \leq C \sqrt{\int_a^b [K(x_1, t) - K(x_2, t)]^2 dt} < \varepsilon$$

при  $|K(x_1, t) - K(x_2, t)| < \frac{\varepsilon}{C(b-a)}$ . Последнее неравенство выполнено, в силу непрерывности  $K(x, t)$ , при  $|x_1 - x_2|$  меньше некоторого  $\delta(\varepsilon)$ . Тем самым равномерная непрерывность последовательности доказана.

В силу теоремы Арцела [14] из последовательности  $z_n(x)$  можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность  $z_{n_k}(x)$ , пределом которой является некоторая непрерывная на  $[a, b]$  функция  $z(x)$ , т. е. элемент пространства  $\mathcal{H}[a, b]$ . Кроме того, известно [14], что если  $z_{n_k}$  сходится к  $z(x)$  равномерно, то сходится и в среднем, т. е.

$$\int_a^b [z_{n_k}(x) - z(x)]^2 dx \rightarrow 0, \text{ или } \|z_{n_k} - z\| \rightarrow 0.$$

Таким образом, доказано существование элемента  $z \in \mathcal{H}[a, b]$  и существование сходящейся к нему подпоследовательности, как требует определение вполне непрерывного оператора. Теорема доказана.

**Определение.** Симметричным (или самосопряженным) оператором называется оператор  $A$ , удовлетворяющий условию

$$(Ay, z) = (y, Az) \quad (\forall y \in H, \forall z \in H). \quad (2.9)$$

**Теорема 2.7.** Оператор Фредгольма является симметричным, если  $K(x, t) = K(t, x)$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} (y, Az) &= \int_a^b y(x) \left[ \int_a^b K(x, t) z(t) dt \right] dx = \\ &= \int_a^b z(t) \left[ \int_a^b K(x, t) y(x) dx \right] dt = \int_a^b z(t) \left[ \int_a^b K(t, x) y(x) dx \right] dt = \\ &= (z, Ay), \end{aligned}$$

что и требуется.

## § 5.

### СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИММЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

**1. Существование по крайней мере одного собственного вектора.** Докажем следующую теорему:



**Теорема 2.8.** *Всякий симметричный вполне непрерывный оператор  $A$  обладает собственным вектором, которому отвечает собственное значение  $\Lambda$ , причем  $|\Lambda| = \|A\|$ .*

Рассмотрим сначала случай  $\|A\| = 0$ . Это означает, что  $\|Ay\| = 0$  при любом  $y$ , для которого  $\|y\| = 1$ . Следовательно,  $Ay = 0$  при любом  $y$ . Таким образом, в этом случае любое  $y$  является собственным вектором оператора  $A$ , а соответствующее собственное значение  $\Lambda = 0$ . Для случая  $\|A\| \neq 0$  утверждение теоремы, таким образом, справедливо. Но этот случай, как было указано выше, не представляет интереса для приложений к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Проведем теперь доказательство для случая  $\|A\| \neq 0$ . Оно основано на нескольких леммах.

**Лемма 2.2.** *Для всякого симметричного оператора  $A$  и любого единичного вектора  $e$  ( $\|e\| = 1$ ) справедливо неравенство*

$$\|Ae\|^2 \leq \|A^2e\|, \quad (2.10)$$

*причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $e$  является собственным вектором оператора  $A$  с собственным значением  $\Lambda = \|Ae\|^2$ .*

**Доказательство.** Имеем  $\|Ae\|^2 = (Ae, Ae) = (A^2e, e) \leq \|A^2e\| \|e\| = \|A^2e\|$ . Пусть в (2.10) имеет место равенство. Тогда в написанной только что цепочке всюду имеет место равенство, в частности, равенство  $(A^2e, e) = \|A^2e\| \cdot \|e\|$ . Следовательно (см. замечание относительно перехода неравенства Коши—Буняковского в равенство в (2.2)),  $A^2e = \Lambda e$ , т. е. вектор  $e$  является собственным вектором оператора  $A^2$  с собственным значением  $\Lambda$ . Имеем тогда в силу равенства первого и третьего членов цепочки  $\|Ae\|^2 = (A^2e, e) = (\Lambda e, e) = \Lambda$ .

Обратно, пусть  $A^2e = \|Ae\|^2 e$ . Тогда  $\|Ae\|^2 = (A^2e, e) = \|A^2e\| \times \|e\| = \|A^2e\|$ , так как в неравенстве Коши—Буняковского имеется равенство. Лемма доказана.

**Определение.** Назовем максимальным вектором оператора  $A$  такой единичный вектор  $e$  ( $\|e\| = 1$ ), на котором  $\|Ae\| = \|A\|$ , т. е. достигается  $\sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$ .

**Лемма 2.3.** *Симметричный вполне непрерывный оператор обладает максимальным вектором.*

**Доказательство.** Обозначим для удобства  $\|A\|$  через  $M$ . Рассмотрим единичную сферу, т. е. совокупность векторов  $\|u\| = 1$ . Обозначим  $y = Au$ . Так как  $M = \sup_{\|u\|=1} \|y\|$ , то найдется последовательность  $u_n$  такая, что  $\|y_n\| = \|Au_n\| \rightarrow M$  при  $n \rightarrow \infty$ . В силу полной непрерывности оператора  $A$  из  $y_n$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $y \in H$ . Обозначим эту подпоследовательность вновь через  $y_n$ . Тогда в силу леммы 2.1  $\|y_n\| \rightarrow \|y\|$  и, следовательно,  $\|y\| = M$  в силу единственности предела.

Положим  $z = \frac{y}{M}$ . Вектор  $z$  является единичным вектором:  $\|z\| = \frac{\|y\|}{M} = 1$ . Докажем, что  $z$  является максимальным вектором, т. е.  $\|Az\| = M$ . Построим последовательность  $z_n = \frac{y_n}{M}$ . При этом будем иметь  $\|Az_n\| = \left\| A \frac{A u_n}{M} \right\| = \frac{1}{M} \|A^2 u_n\|$ . Тогда согласно лемме 2.2  $\|Az_n\| = \frac{1}{M} \|A^2 u_n\| \geq \frac{1}{M} \|A u_n\|^2 = \frac{1}{M} \|y_n\|^2$ . С другой стороны, согласно теореме 2.2  $\|Az_n\| \leq \|A\| \|z_n\| = M \frac{1}{M} \|y_n\| = \|y_n\|$ . Таким образом, справедливы неравенства

$$\|Az_n\| \geq \frac{1}{M} \|y_n\|^2, \quad \|Az_n\| \leq \|y_n\|. \quad (2.11)$$

Перейдем в этих неравенствах к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $y_n \rightarrow y$ ,  $z_n \rightarrow z$ ,  $\|y_n\| \rightarrow M$ ,  $Az_n \rightarrow Az$  (в силу непрерывности оператора  $A$ , следующей из полной непрерывности) и  $\|Az_n\| \rightarrow \|Az\|$  (в силу леммы 2.1). В результате из (2.11) получим, что  $\|Az\| = M$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.4.** *Максимальный вектор  $z$  симметричного оператора  $A$  является собственным вектором оператора  $A^2$  с собственным значением  $M^2$ .*

Действительно,  $M^2 = \|Az\|^2$  и согласно лемме 2.2 и теореме 2.2 имеем  $M^2 = \|Az\|^2 \leq \|A^2 z\| = \|A(Az)\| \leq \|A\| \|Az\| \leq \|A\|^2 \|z\| = M^2$ . В силу равенства крайних членов этой цепочки имеем сквозное равенство, так что  $\|Az\|^2 = \|A^2 z\|$ . Следовательно, согласно лемме 2.2 вектор  $z$  является собственным вектором оператора  $A^2$  с собственным значением  $\|Az\|^2$ , т. е.  $M^2$ , что и требовалось.

Теперь докажем теорему 2.8. Имеем  $A^2 z = M^2 z$ , или  $(A^2 - M^2)z = 0$ , или  $(A - M)(A + M)z = 0$ . Пусть вектор  $u = (A + M)z \neq 0$ . Тогда  $(A - M)u = 0$  и  $Au = Mu$ , т. е.  $u$  является собственным вектором оператора  $A$  с собственным значением  $M$ . Если же  $u = (A + M)z = 0$ , то  $Az = -Mz$  и  $z$  является собственным вектором оператора  $A$  с собственным значением  $-M$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Если оставить только требование симметрии и не требовать полной непрерывности, то оператор  $A$  может и не иметь собственных векторов. Пусть  $y(x) \in h[a, b]$  и  $Ay = xy$ . Этот оператор является симметричным:

$$(Ay, z) = \int_a^b xy(x) z(x) dx = (y, Az).$$

Однако, очевидно, ни при каком  $\Lambda = \text{const}$  и  $y(x) \neq 0$  не выполнено тождество  $Ay = \Lambda y$ , т. е.  $xy(x) = \Lambda y(x)$ .

**2. Существование последовательности собственных векторов.** Мы доказали существование собственного вектора вполне непрерывного симметричного оператора  $A$ . Возникает вопрос: имеет ли  $A$  другие собственные векторы? Займемся его выяснением. С этой целью нам удобно будет обозначить пространство  $H$ , в котором было доказано существование собственного вектора, через  $H_1$ , сам собственный вектор — через  $y_1$  (его будем считать нормированным, т. е.  $\|y_1\| = 1$ ), а соответствующее ему собственное значение — через  $\Lambda_1$ .

**Лемма 2.5.** *Собственное значение  $\Lambda_1$  является наибольшим по модулю среди всех собственных значений оператора  $A$ .*

Действительно, пусть  $\Lambda$  — некоторое собственное значение оператора  $A$ , а  $y$  отвечающий ему нормированный собственный вектор, т. е.  $Ay = \Lambda y$ . Тогда  $\|Ay\| = |\Lambda| \cdot \|y\| = |\Lambda|$ , т. е.  $|\Lambda_1| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| \geq |\Lambda|$ , что и требовалось.

Построим подпространство  $H_2$  пространства  $H_1$ , элементы которого выделены условием  $(y, y_1) = 0$ . Оно называется подпространством, ортогональным  $y_1$ .

Введенное подпространство  $H_2$  обладает следующими свойствами:

1°.  $H_2$  является подпространством, инвариантным относительно оператора  $A$ , т. е. если  $y \in H_2$ , то и  $Ay \in H_2$ .

2°.  $H_2$  является подпространством, замкнутым относительно предельного перехода, т. е. если  $y_n$  является последовательностью, сходящейся к  $y \in H_1$  и  $y_n \in H_2$ , то и  $y \in H_2$ .

Докажем 1. Действительно,

$$(Ay, y_1) = (y, Ay_1) = (y, \Lambda_1 y_1) = \Lambda_1 (y, y_1) = 0.$$

Докажем 2. Действительно,  $(y, y_1) = (y_n + \Delta_n, y_1) = (y_n, y_1) + (\Delta_n, y_1) = (\Delta_n, y_1)$ , где  $\Delta_n = y - y_n$  и  $\|\Delta_n\| = \|y - y_n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $|(y, y_1)| = |(\Delta_n, y_1)| \leq \|\Delta_n\| \cdot \|y_1\| = \|\Delta_n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $(y, y_1)$  от  $n$  не зависит, то отсюда вытекает, что  $(y, y_1) = 0$ .

Свойства 1° и 2° позволяют провести в  $H_2$  все те рассуждения, которые были проведены в  $H_1$  для доказательства существования собственного вектора. В  $H_2$  справедливы леммы 2.2—2.4 и теорема 2.3, а следовательно, имеет место теорема 2.8. Таким образом, в  $H_2$  существует собственный вектор  $y_2$ , ортогональный  $y_1$ :  $(y_2, y_1) = 0$  и ему отвечает собственное значение  $\Lambda_2$ , наибольшее по модулю среди всех собственных значений оператора  $A$ , отвечающих собственным векторам из  $H_2$ .

Процесс можно продолжить. Построим подпространство  $H_3$ , выделяемое условием  $(y, y_1) = (y, y_2) = 0$ . Получим, что существует собственный вектор  $y_3$  такой, что  $(y_1, y_3) =$

$= (y_2, y_3) = 0$ . При этом  $|\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq |\Lambda_3|$ . Описанный процесс может быть бесконечным, и тогда существует бесконечная последовательность собственных векторов  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , где  $(y_i, y_k) = 0$  ( $i \neq k$ ) и соответствующая последовательность собственных значений  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n, \dots$ , причем  $|\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq \dots \geq |\Lambda_n| \geq \dots$ .

Но может случиться, что процесс оборвется на некотором шаге. Это произойдет, если для некоторого  $m$  либо подпространство  $H_m$  пусто, либо в подпространстве  $H_m$  имеет место соотношение  $Ay = 0$  для  $\forall y \in H_m$ . Последнее означает, что  $\forall y \in H_m$  является собственным вектором с собственным значением  $\Lambda = 0$ .

**Пример.** Пусть  $A$  представляет собой оператор Фредгольма  $Ay = \int_0^1 xty(t)dt$ . Тогда для любой функции  $y(x) \in h[0, 1]$ ,

такой, что  $\int_0^1 y^2(x)dx = 1$ , имеем:  $\|Ay\|^2 = \int_0^1 \left[ \int_0^1 xt y(t) dt \right]^2 dx \leq \int_0^1 dx \left[ \int_0^1 x^2 t^2 dt \int_0^1 y^2(t) dt \right] = 1/9$ , т. е.  $\|A\| \leq \frac{1}{3}$ . Нетрудно ви-

деть, что при  $y = x\sqrt{3}$  выполнено  $Ay = x \int_0^1 t^2 \sqrt{3} dt = \frac{x}{\sqrt{3}}$  и

$\|Ay\| = \sqrt{\int_0^1 \frac{x^2}{3} dx} = \frac{1}{3}$ . Таким образом,  $\|A\| = \frac{1}{3}$  и достигает-

ся при  $y = x\sqrt{3}$ , т. е.  $y = x\sqrt{3}$  является максимальным вектором. А так как  $A(x\sqrt{3}) = \frac{1}{3}(x\sqrt{3})$ , то  $y = x\sqrt{3}$  является собственным вектором, которому отвечает собственное значение  $\Lambda = 1/3$ . Согласно установленной выше нумерации функция  $y = x\sqrt{3}$  является собственным вектором  $y_1$ .

Построим подпространство  $H_2$ . Оно состоит из векторов, ортогональных вектору  $x\sqrt{3}$ , т. е. удовлетворяющих условию  $\int_0^1 xy(x)dx = 0$ . Но тогда в  $H_2$  имеем:  $Ay = \int_0^1 xty(t)dt = 0$  при  $\forall y \in H_2$ , т. е.  $\forall y \in H_2$  является собственным вектором оператора  $A$  с собственным значением, равным нулю. Описанный выше процесс обрывается.

## § 6.

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО  
СИММЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

**1. Структура множества собственных значений и собственных векторов.** В предыдущем параграфе была построена после-

довательность собственных векторов и собственных значений вполне непрерывного симметричного оператора  $A$ . Возникает естественный вопрос: получим ли мы таким образом все собственные значения и собственные векторы данного оператора?

Пусть вполне непрерывный симметричный оператор  $A$  обладает некоторым множеством собственных значений и собственных векторов. Можно ли сказать что-нибудь о свойствах этих собственных векторов и собственных значений, основываясь только на факте их существования? Такие свойства принято называть априорными. Исследование априорных свойств поможет получить положительный ответ на вопрос, поставленный в начале пункта.

**Теорема 2.9.** *Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой.*

Действительно, пусть  $Ay_1 = \Lambda_1 y_1$ ,  $Ay_2 = \Lambda_2 y_2$ . Умножим первое уравнение скалярно на  $y_2$ , а второе — на  $y_1$  и вычтем одно из другого. Получим  $(y_2, Ay_1) - (y_1, Ay_2) = \Lambda_1(y_2, y_1) - \Lambda_2(y_1, y_2) = (y_1, y_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2)$ . В силу симметрии  $A$  левая часть равна нулю. Поэтому  $(y_1, y_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2) = 0$ , и так как  $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ , то  $(y_1, y_2) = 0$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.10.** *Имеется не более конечного числа линейно независимых собственных векторов, для которых отвечающие им собственные значения удовлетворяют неравенству  $|\Lambda| > \delta$ , где  $\delta > 0$  — любое наперед заданное число.*

Доказательство проведем от противного. Пусть имеется бесконечная последовательность  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  таких векторов. Отвечающие этим векторам собственные значения обозначим  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n, \dots$ . Последовательность  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , вообще говоря, не является ортогональной, т. е.  $(y_i, y_k) \neq 0$ , если  $\Lambda_i = \Lambda_k$ . Применяя метод ортогонализации [15], можно заменить систему векторов, отвечающих одному и тому же значению  $\Lambda$ , ортогональной системой векторов (сохраняя для новых векторов те же обозначения). Тогда последовательность  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  можно считать ортонормированной, т. е.  $(y_i, y_k) = 0$  ( $i \neq k$ ),  $\|y_i\| = 1$ .

Имеем  $\|Ay_i - Ay_k\|^2 = \|\Lambda_i y_i - \Lambda_k y_k\|^2 = (\Lambda_i - \Lambda_k)^2 (y_i - y_k, y_i - y_k) = (\Lambda_i - \Lambda_k)^2 + \Lambda_k^2 > 2\delta^2$ . С другой стороны, в силу полной непрерывности оператора  $A$  из последовательности  $Ay_n$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее снова  $Ay_n$ ), а всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной, т. е.  $\|Ay_n - Ay_{n+m}\| < \epsilon$  для  $n > N(\epsilon)$ ,  $m > 0$ . Если выбрать  $\epsilon^2 < 2\delta^2$ , то получим противоречие с написанным выше неравенством, которое, если в нем положить  $i = n$ ,  $k = n + m$ , имеет вид  $\|Ay_n - Ay_{n+m}\|^2 > 2\delta^2$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.11** (следствие теоремы 2.10). *Каждому отличному от нуля собственному значению отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных векторов.*

Действительно, пусть  $\Lambda$  — отличное от нуля собственное значение. Чтобы получить утверждение данной теоремы, достаточно в предыдущей теореме положить  $\delta = |\Lambda|/2$ .

**Определение.** Рангом собственного значения называется максимальной число отвечающих ему линейно независимых собственных векторов.

Пользуясь этим определением, утверждение теоремы 2.11 можно сформулировать так: каждое собственное значение оператора, отличное от нуля, имеет конечный ранг.

Из теорем 2.9—2.11 можно сделать выводы:

1. *Отличные от нуля собственные значения оператора образуют последовательность, и их можно занумеровать в порядке убывания модуля, нумеруя каждое собственное значение столько раз, каков его ранг. Этой последовательности собственных значений отвечает ортонормированная последовательность линейно независимых собственных векторов* (линейно независимые собственные векторы  $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+p}, \dots$ , отвечающие  $\Lambda_i = \Lambda_{i+1} = \dots = \Lambda_{i+p}$ , вообще говоря, неортогональны, но методом ортогонализации можно построить столько же ортонормированных собственных векторов).

В дальнейшем будем считать, что система собственных векторов уже приведена к ортонормированному виду.

2. *Если оператор имеет бесконечное число собственных значений, то  $|\Lambda_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .* Действительно, начиная с некоторого номера, все  $\Lambda_n$  удовлетворяют неравенству  $|\Lambda_n| \leq \delta$ , в противном случае было бы бесконечное число собственных значений, удовлетворяющих неравенству  $|\Lambda_n| > \delta$ .

**Замечание.** Собственное значение ранга  $p > 1$  можно нумеровать один раз (как  $\Lambda_k$ ), а отвечающие ему  $k$  собственных функций нумеровать двойными индексами:  $y_{k1}, \dots, y_{kp}$ . Такой способ обозначений будет использован в § 16.

Пользуясь доказанными свойствами, можно убедиться в том, что построенная в § 5 последовательность собственных значений исчерпывает все отличные от нуля собственные значения оператора  $A$ , а любая собственная функция является линейной комбинацией тех, которые получены в § 5.

В самом деле, построение § 5 дает следующую цепочку собственных значений:

$$|\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq \dots > |\Lambda_{k-p}| = \dots = |\Lambda_k| > |\Lambda_{k+1}| \geq \dots$$

и соответствующую им последовательность собственных векторов  $y_1, y_2, \dots, y_{k-p}, \dots, y_k, y_{k+1}$ .

Допустим, что имеется собственный вектор  $y$  (отвечающий собственному значению  $\Lambda \neq 0$ ), линейно независимый

от построенных. Тогда для некоторого номера  $k$  будет выполнено неравенство  $|\Lambda_k| \geq |\Lambda| > C$ , где  $C = |\Lambda_{k+1}|$ , если имеются отличные от нуля собственные значения  $0 < |\Lambda_i| < |\Lambda|$ , и  $C = 0$ , если собственных значений всего  $k+1$  и для всех для них  $|\Lambda_i| \geq |\Lambda|$ . Вектор  $y$  ортогонален тем  $y_i (i = 1, \dots, k)$ , для которых  $\Lambda_i \neq \Lambda$  (по теореме 2.9), а также тем из  $y_i (i = 1, \dots, k)$ , для которых  $\Lambda_i = \Lambda$  (поскольку все векторы, отвечающие одному собственному значению, ортонормированы). Поэтому  $y \in H_{k+1}$ . Имеем  $\|Ay\| = |\Lambda| \cdot \|y\| = |\Lambda|$ , в то время как  $\sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in H_{k+1}}} \|Au\| = C < |\Lambda|$ . Получаем противоречие, которым

и завершается доказательство исчерпывающего свойства последовательности § 5.

**2. Необходимое и достаточное условие отображения в нуль.** Докажем еще одно свойство собственных векторов, которое будет использовано в гл. 4.

**Теорема 2.12.** Для того чтобы вектор  $y$  удовлетворял уравнению  $Ay = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы вектор  $y$  был ортогонален всем собственным векторам оператора  $A$  с отличными от нуля собственными значениями.

Доказательство. 1° (необходимость). Пусть  $Ay = 0$ . Докажем, что  $(y, y_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Имеем  $(y, y_i) = \left(y, \frac{Ay_i}{\Lambda_i}\right) = \frac{1}{\Lambda_i} (y, Ay_i) = \frac{1}{\Lambda_i} (Ay, y_i) = 0$ , что и требуется.

2° (достаточность). Допустим противное, т. е. допустим, что  $(y, y_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), а  $Ay \neq 0$ , и значит,  $\|Ay\| = \delta \neq 0$ . Введем единичный вектор  $\psi = \frac{y}{\|y\|}$ . Для него  $\|A\psi\| = \frac{\delta}{\|y\|} =$

$= \delta_1$ . Рассмотрим все собственные векторы  $y_i$ , для которых  $|\Lambda_i| > \frac{\delta_1}{2}$ . По теореме 2.10 таких собственных векторов ко-

нечное число:  $y_1, \dots, y_l$ . Рассмотрим подпространство  $H_{l+1}$  векторов, ортогональных  $y_1, \dots, y_l$ . Имеем  $\sup_{\substack{u \in H_{l+1} \\ \|u\|=1}} \|Au\| =$

$= |\Lambda_{l+1}| \leq \frac{\delta_1}{2}$ . С другой стороны,  $\psi \in H_{l+1}$  и  $\|A\psi\| = \delta_1$ . Полу-

ченное противоречие доказывает утверждение 2°. Теорема доказана.

ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА  
ВТОРОГО РОДА

## § 7.

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ  
ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds, \quad x \in [a, b]. \quad (3.1)$$

**Определение.** Значение параметра  $\lambda \neq 0$  и соответствующая функция  $y(x) \neq 0$ , удовлетворяющая уравнению (3.1), называются собственным значением\* и собственной функцией этого интегрального уравнения, или, другими словами, собственным значением и собственной функцией ядра  $K(x, s)$ .

Будем предполагать, что ядро  $K(x, s)$  при  $x, s \in [a, b]$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1°.  $K(x, s)$  — вещественная функция.
- 2°.  $K(x, s) \neq 0$ . (3.2)
- 3°.  $K(x, s)$  — непрерывная функция по совокупности аргументов.
- 4°.  $K(x, s)$  — симметричное ядро, т. е.  $K(x, s) = K(s, x)$ .

В главах 3—4 всюду, за исключением специально оговоренных случаев, будем считать эти требования на ядро выполненными.

## Свойства собственных значений и собственных функций

**Теорема 3.1.** 1. Собственные значения ядра  $K(x, s)$  вещественны.

2. Нахождение комплексных собственных функций сводится к нахождению вещественных собственных функций.

**Доказательство.** Допустим, что  $\lambda = \mu + i\nu$  — собственное значение ядра  $K(x, s)$ , а  $y(x)$  — соответствующая собственная функция. Для них выполнено соотношение

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds.$$

---

\* Употребляется также термин *характеристическое значение* (см. [20]).



Учитывая, что  $K(x, s)$  вещественно, имеем для комплексно сопряженных величин  $y^*(x) = \lambda^* \int_a^b K(x, s) y^*(s) ds$ . Пользуясь написанными двумя соотношениями, имеем

$$\int_a^b |y(x)|^2 dx = \int_a^b y y^* dx = \lambda^* \int_a^b y(x) dx \int_a^b K(x, s) y^*(s) ds,$$

$$\int_a^b |y(x)|^2 dx = \int_a^b y^* y dx = \lambda \int_a^b y^*(x) dx \int_a^b K(x, s) y(s) ds.$$

Так как в силу  $K(s, x)$  двойные интегралы справа равны между собой, то деля первое из этих соотношений на  $\lambda^*$ , а второе на  $\lambda$  и вычитая друг из друга, получим

$$\left( \frac{1}{\lambda^*} - \frac{1}{\lambda} \right) \int_a^b |y(x)|^2 dx = 0.$$

Так как  $\lambda^* \neq \lambda$ , то отсюда  $\int_a^b |y(x)|^2 dx = 0$ , т. е.  $y(x) \equiv 0$ . Это противоречит предположению о том, что  $y(x)$  — собственная функция ядра  $K(x, s)$ . Следовательно,  $\lambda = 0$  и  $\lambda$  может быть только действительным числом.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть действительному собственному значению  $\lambda$  соответствует комплексная собственная функция  $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ , где  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  вещественны. Тогда имеем  $y_1(x) + iy_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) [y_1(s) + iy_2(s)] ds$ . Разделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получим

$$y_1'(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y_1(s) ds, \quad y_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y_2(s) ds.$$

Таким образом, нахождение комплексной собственной функции  $y(x)$  сводится к решению уравнения (3.1) для вещественных функций.

**Теорема 3.2.** Если  $K(x, s)$  непрерывно и  $K(x, s) \neq 0$ , то норма оператора Фредгольма отлична от нуля.

**Доказательство.** Обозначим

$$z(x) = \int_a^b K(x, s) y(s) ds \quad (\text{или } z = Ay).$$

Так как  $K(x, s) \not\equiv 0$ , то существует точка  $(x_0, s_0)$ , в которой  $K(x_0, s_0) \neq 0$  (пусть для определенности  $K(x_0, s_0) > 0$ ). Тогда в силу непрерывности  $K(x, s) > 0$  при  $s_0 - \delta \leq \rho \leq s_0 + \delta$ , если  $\delta$  достаточно мало.

Возьмем неотрицательную непрерывную функцию  $u(x)$ , равную нулю на отрезках  $[a, s_0 - \delta]$  и  $[s_0 + \delta, b]$ , и положительную в интервале  $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  (в остальном — произвольную). Тогда

$$\|u\|^2 = \int_a^b u^2(s) ds = \int_{s_0 - \delta}^{s_0 + \delta} u^2(s) ds > 0.$$

Пусть  $\tilde{y}(s) = \frac{u(s)}{\|u\|}$ . Эта функция обладает нормой, равной единице, и, как и  $u(s)$ , положительна в интервале  $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  и равна нулю вне его. Тогда

$$z(x_0) = \int_a^b K(x_0, s) \tilde{y}(s) ds = \int_{s_0 - \delta}^{s_0 + \delta} K(x_0, s) \tilde{y}(s) ds > 0.$$

Таким образом,  $z(x) \not\equiv 0$  и, следовательно  $\|z\| = \|A\tilde{y}\| > 0$ . Тогда  $\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| > 0$ , что и требовалось.

Итак, собственные значения интегрального уравнения (3.1) могут быть только вещественными и достаточно находить только вещественные собственные функции. Норма оператора Фредгольма при выполнении условий (3.2) отлична от нуля. Поэтому к интегральному уравнению (3.1) мы вправе применять развитую в предыдущей главе теорию.

Уравнение (3.1) можно записать в форме

$$y = \lambda Ay, \quad (3.3)$$

где  $Ay = \int_a^b K(x, s)y(s)ds$  — оператор Фредгольма. Этот оператор при условиях (3.2) является симметричным (теорема 2.7) и вполне непрерывным (теорема 2.6) оператором. Соотношение (3.3) совпадает с уравнением (2.6) при  $\lambda = 1/\Lambda$ . Поэтому результаты § 5, 6 предыдущей главы можно применительно к уравнению Фредгольма (2.1) сформулировать следующим образом:

**Теорема 3.3.** 1. Существует конечная или бесконечная последовательность линейно независимых собственных функций и соответствующих собственных значений ядра  $K(x, s)$ .

2. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Ранг любого собственного

значения конечен. Всю систему собственных функций можно ортонормировать, так чтобы были выполнены соотношения

$$\int_a^b y_i(x) y_m(x) dx = 0 \quad (i \neq m), \quad \int_a^b y_i^2(x) dx = 1.$$

3. Каково бы ни было  $L > 0$ , может существовать лишь конечное число собственных значений, удовлетворяющих неравенству  $|\lambda| < L$ . Если все число собственных значений бесконечно и их расположить в порядке возрастания абсолютной величины

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty.$$

В дальнейшем будем считать, что система собственных функций приведена к ортонормированному виду.

Пусть найденные собственная функция  $y_1(x)$  ядра  $K(x, s)$  и соответствующее собственное значение  $\lambda_1$ . Возникает вопрос: как найти другие собственные функции?

**Теорема 3.4.** Если  $y_1(x)$  — собственная функция ядра  $K(x, s)$  и  $\lambda_1$  — соответствующее собственное значение, то ядро

$$K^{(2)}(x, s) = K(x, s) - \frac{y_1(x) y_1(s)}{\lambda_1}$$

имеет те же собственные значения и собственные функции, что и ядро  $K(x, s)$ , кроме  $y_1(x)$  и  $\lambda_1$ .

Доказательство разобьем на три этапа.

а. Пусть  $y_2(x)$  и  $\lambda_2$  — собственная функция и собственное значение ядра  $K^{(2)}(x, s)$ . Покажем, что  $y_2$  ортогональна  $y_1$ . Обозначим

$$\begin{aligned} A^{(2)}y &= \int_a^b K^{(2)}(x, s) y(s) ds = \int_a^b \left[ K(x, s) - \frac{y_1(x) y_1(s)}{\lambda_1} \right] y(s) ds = \\ &= Ay - \frac{y_1(y_1, y)}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Поскольку ядро  $K^{(2)}(x, s)$  симметрично, то оператор  $A^{(2)}$  является симметричным. Учитывая это, а также условие  $(y_1, y_1) = 1$ , имеем

$$\begin{aligned} (y_1, y_2) &= (y_1, \lambda_2 A^{(2)} y_2) = \lambda_2 (A^{(2)} y_1, y_2) = \\ &= \lambda_2 \left( Ay_1 - \frac{y_1(y_1, y_1)}{\lambda_1}, y_2 \right) = \lambda_2 \left( \frac{y_1}{\lambda_1} - \frac{y_1}{\lambda_1}, y_2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $(y_1, y_2) = 0$ , что и требовалось.

б. Докажем, что  $y_2(x)$  является собственной функцией ядра  $K(x, s)$ . Действительно,

$$y_2 = \lambda_2 A^{(2)} y_2 = \lambda_2 \left[ Ay_2 - \frac{y_1(y_2, y_1)}{\lambda_1} \right].$$

Последнее слагаемое равно нулю, поскольку  $(y_1, y_2) = 0$ . Следовательно,  $y_2 = \lambda_2 Ay_2$ , что и требовалось.

в. Докажем, что всякая собственная функция  $\bar{y}(x)$  ядра  $K(x, s)$ , кроме  $y_1(x)$ , является собственной функцией ядра  $K^{(2)}(x, s)$ . Пусть  $\bar{y} = \bar{\lambda} A\bar{y}$ . Рассмотрим равенство

$$A^{(2)}\bar{y} = A\bar{y} - \frac{y_1(\bar{y}, y_1)}{\lambda_1} = \frac{y}{\lambda} - \frac{y_1}{\lambda_1} (y, y_1).$$

Если  $\bar{y}(x)$  совпадает с  $y_1(x)$ , а  $\bar{\lambda}$  соответственно с  $\lambda_1$ , то правая часть равенства обращается в нуль. Поэтому  $A^{(2)}\bar{y} = 0$ , а это значит, что  $\bar{y}(x)$  не является собственной функцией ядра  $K^{(2)}(x, s)$ . Если же  $\bar{y}(x)$  не совпадает с  $y_1(x)$ , то  $(y, y_1) = 0$ . Следовательно,  $A^{(2)}\bar{y} = \frac{y}{\lambda}$  и  $\bar{y}$  является собственной функцией ядра  $K^{(2)}(x, s)$ .

**Следствие.** Если  $y_1, \dots, y_n$  — собственные функции ядра  $K(x, s)$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — соответствующие собственные значения, то ядро

$$K^{(n+1)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i}$$

имеет те же собственные функции и собственные значения, что и ядро  $K(x, s)$ , за исключением  $y_1, \dots, y_n$ .

Для доказательства следствия достаточно применить теорему 2.3  $n$  раз, последовательно повышая на единицу индекс  $m$  ядра  $K^{(m)}(x, s)$ .

Пусть найдены  $n$  собственных функций ядра  $K(x, s)$ , где  $n \geq 1$ . Строим ядро  $K^{(n+1)}(x, s)$ . Если  $K^{(n+1)}(x, s) \neq 0$ , то легко проверить, что для него выполнены все требования (3.2). Следовательно, существует собственная функция  $y_{n+1}(x)$  ядра  $K^{(n+1)}(x, s)$ . Эта функция  $y_{n+1}(x)$  будет по доказанному являться и собственной функцией ядра  $K(x, s)$ , ортогональной  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ . Таким образом, будут найдены уже  $n+1$  собственных функций. И так далее.

При этом возможны два исхода. Либо процесс будет продолжаться бесконечно и можно указанным алгоритмом

определить любое нужное число собственных функций, либо на некотором  $m$ -м шаге получим

$$K^{(m+1)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^m \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i} \equiv 0.$$

В этом случае ядро  $K(x, s)$  относится к так называемым вырожденным ядрам, которые изучаются в § 9.

Замечание. Проведенное в настоящем пункте построение последовательности собственных значений и собственных функций в точности соответствует тому построению, которое было проделано в абстрактной форме в гл. 2.

## § 8.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО МЕТОДУ КЕЛЛОГА

Выше было доказано существование собственных функций у ядра  $K(x, s)$ , удовлетворяющих требованиям (3.2), но не указывался метод их конструктивного определения. Последний вопрос рассматривается в настоящем параграфе.

Собственные функции и собственные значения ядра могут быть найдены, например, путем последовательных приближений по *методу Келлога*.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda Ay = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds \quad (3.4)$$

в случае, когда ядро  $K(x, s)$  удовлетворяет условиям (3.2). Покажем, что собственные функции и собственные значения ядра  $K(x, s)$  могут быть найдены путем некоторого рекуррентного процесса. Перейдем к описанию этого процесса.

1. Выберем произвольную непрерывную функцию  $y_0(x)$  такую, что  $Ay_0 \neq 0$ . Определим последовательность функций  $y_n(x)$  для  $n \geq 1$  из рекуррентного соотношения

$$y_n = Ay_{n-1}. \quad (3.5)$$

Обозначим  $\|y_n\|_1 = N_n$ . Имеет место соотношение

$$N_n^2 = (y_p, y_q), \quad (3.6)$$

где  $p+q=2n$ . Действительно, пусть  $p = n + m$ , а  $q = n - m$ . Тогда в силу симметрии оператора  $A$  имеем

$$(y_p, y_q) = (A^m y_n, y_q) = (y_n, A^m y_q) = (y_n, y_n) = N_n^2.$$

Для нормированных функций  $\varphi_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} = \frac{y_n}{N_n}$  из (3.5) получаем

$$\varphi_n = \mu_n A \varphi_{n-1}, \quad \text{где} \quad \mu_n = \frac{N_{n-1}}{N_n}. \quad (3.7)$$

2. Докажем сходимость последовательности  $\mu_n$ . Из формулы  $N_n^2 = (y_{n-1}, y_{n+1})$  в силу неравенства Коши—Буняковского получаем  $N_n^2 \leq N_{n-1} N_{n+1}$ . Отсюда  $\frac{N_{n-1}}{N_n} \geq \frac{N_n}{N_{n+1}}$  или  $\mu_n \geq \mu_{n+1} \geq 0$ . Таким образом, последовательность  $\mu_n$  — монотонно невозрастающая и ограничена снизу. Следовательно, существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu \geq 0$ .

Покажем, что  $\mu \neq 0$ . Для этого соотношение (3.5) умножим на  $y_n$ , проинтегрируем по  $x$  и воспользуемся неравенством Коши—Буняковского. Имеем

$$\begin{aligned} N_n^2 &= (y_n, y_n) = (y_n, A y_{n-1}) = \int_a^b y_n(x) dx \int_a^b K(x, s) y_{n-1}(s) ds \leq \\ &\leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds} \sqrt{\int_a^b y_n^2 dx \int_a^b y_{n-1}^2 ds} = C N_n N_{n-1}, \end{aligned}$$

где  $C^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds$ .

Отсюда  $N_n \leq C N_{n-1}$  и  $\mu_n = \frac{N_{n-1}}{N_n} \geq \frac{1}{C} > 0$ . Предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  дает  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \geq \frac{1}{C} > 0$ .

3. Убедимся в том, что  $N_n \neq 0$ , а следовательно,  $y_n(x) \neq 0$ . Действительно,  $y_0$  выбрано так, что  $y_1 = A y_0 \neq 0$ . При этом будет выполнено  $N_0 > 0$  и  $N_1 > 0$ . Из неравенства  $N_2 N_0 \geq N_1^2$  следует  $N_2 \neq 0$ . Аналогично получаем  $N_3 \neq 0$  и так далее. Таким образом, все  $N_n \neq 0$  для  $n \geq 0$ .

4. Докажем, что четные итерации  $\varphi_{2n}$  сходятся в среднем к некоторой функции  $\bar{\varphi}(x)$ , а нечетные итерации  $\varphi_{2n+1}$  — к  $\bar{\varphi}(x)$ .

Функции  $\varphi_n(x)$  непрерывны и нормированы на единицу. Оператор  $A$  переводит такие функции в последовательность равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функций (см. доказательство теоремы 2.6). Поскольку

$A\varphi_{n-1} = \frac{\varphi_n}{\mu_n}$ , то последовательность  $\frac{\varphi_n}{\mu_n}$  состоит из равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функций. По доказанному  $\frac{1}{\mu_n} \geq \frac{1}{\mu_0}$ . Отсюда следует, что последовательность  $\varphi_n$  также состоит из равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных функций.

Таким же свойством обладают в отдельности последовательности четных  $\varphi_{2n}$  и нечетных  $\varphi_{2n+1}$  итераций.

По теореме Арцеля существует подпоследовательность  $\varphi_m$  последовательности  $\varphi_{2n}$ , равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции  $\bar{\varphi}(x)$ . Из равномерной сходимости следует сходимость  $\varphi_m$  к  $\bar{\varphi}$  в среднем.

Докажем, что вся последовательность  $\varphi_{2m}$ , а не только подпоследовательность  $\varphi_m$  сходится к  $\bar{\varphi}$  в среднем. Действительно, из сходимости  $\varphi_m$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать номер  $n_0(\varepsilon)$  такой, что для любых функций  $\varphi_{m_1}$  и  $\varphi_{m_2}$  из последовательности  $\varphi_m$  с номерами  $m_1, m_2 > n_0(\varepsilon)$  будет выполнено:  $J_{m_1, m_2} = \|\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2}\| < \varepsilon$ . Пусть для определенности  $m_2 > m_1$ . Убедимся, что для всех четных  $m$  и  $k$  таких, что  $m_1 \leq m \leq k \leq m_2$ , выполнено неравенство  $\|\varphi_m - \varphi_k\| < \varepsilon$ . Этим будет доказана сходимость в среднем всей последовательности  $\varphi_{2n}$ . Действительно, рассмотрим выражение  $J_{m, k} = \|\varphi_m - \varphi_k\|$ . Учитывая, что  $\|\varphi_m\| = \|\varphi_k\| = 1$ , имеем  $J_{m, k}^2 = 2 - 2(\varphi_m, \varphi_k)$ , или

$$2 - J_{m, k}^2 = 2(\varphi_m, \varphi_k) = \frac{2(y_m, y_k)}{N_m N_k} = \frac{2 \frac{N_{m+k}^2}{2}}{N_m N_k}. \quad (3.8)$$

Последнее равенство имеет место в силу (3.6). Заменяя в (3.8)  $k$  на  $k+2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{2 - J_{m, k+2}^2}{2 - J_{m, k}^2} &= \frac{\frac{N_{m+k+2}^2}{2} + 1}{\frac{N_{m+k}^2}{2}} \cdot \frac{N_m N_k}{N_{k+2} N_m} = \frac{\frac{N_{m+k+2}^2}{2} + 1}{\frac{N_{m+k}^2}{2}} \times \\ &\times \frac{N_{k+1} N_k}{N_{k+2} N_{k+1}} = \frac{\mu_k \mu_{k+1}}{\frac{\mu_{m+k}^2}{2} + 1} \leq 1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

так как  $\frac{\mu_{m+k}}{2} + 1 \geq \mu_k \geq \mu_{k+1}$  при  $m < k$ . Заменяя в (3.8)  $m$  на  $m-2$ , имеем

$$\frac{2 - J_{m-2, k}^2}{2 - J_{m, k}^2} = \frac{\frac{N_{m+k}^2}{2} - 1}{\frac{N_{m+k}^2}{2}} \frac{N_m N_{m-1}}{N_{m-1} N_{m-2}} = \frac{\frac{\mu_{m+k}^2}{2}}{\mu_{m-1} \mu_{m-2}} \leq 1. \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) получаем, что  $J_{m, k+2} \geq J_{m, k}$  и  $J_{m-2, k} \geq J_{m, k}$ . Увеличивая индекс  $k$  до  $m_2$  и уменьшая индекс  $m$  до  $m_1$ , будем иметь  $\|\varphi_m - \varphi_k\| = J_{m, k} \leq J_{m_1, m_2} < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

Аналогично устанавливается сходимость в среднем последовательности  $\varphi_{2n+1}$  к некоторой непрерывной функции  $\bar{\varphi}(x)$ .

5. Докажем, что из равностепенной непрерывности и сходимости в среднем последовательности  $\varphi_{2n}$  следует ее равномерная сходимость к  $\bar{\varphi}(x)$ .

Рассмотрим разность  $\omega_{mn}(x) = \varphi_m(x) - \varphi_n(x)$  при четных  $m, n$ . В силу равностепенной непрерывности  $\varphi_m(x)$  и  $\varphi_n(x)$  для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$|\omega_{mn}(x_1) - \omega_{mn}(x_2)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \quad (3.11)$$

для всех  $m, n$ . Кроме того,

$$\int_a^b \omega_{mn}^2 dx = \int_a^b [\varphi_m(x) - \varphi_n(x)]^2 dx < \varepsilon \quad (3.12)$$

при  $m, n > \bar{n}(\varepsilon)$  в силу сходимости последовательности  $\varphi_n(x)$  в среднем.

Докажем, что

$$|\omega_{mn}| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m, n > N(\varepsilon) \quad (3.13)$$

для всех  $x \in [a, b]$ . Отсюда следует справедливость утверждения настоящего пункта.

Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда для любого  $x \in [a, b]$  найдется  $x_k$  такое, что при  $|x - x_k| < \delta(\varepsilon/2)$  справедливо неравенство

$$|\omega_{mn}(x) - \omega_{mn}(x_k)| < \varepsilon/2 \quad (3.14)$$

для всех  $x \in [a, b]$ . Покроем  $[a, b]$  конечным числом интервалов  $I_k$ , длина которых равна  $\delta(\varepsilon/2)$ . Тогда можно утверждать, что для всех достаточно больших  $m, n > N(\varepsilon)$  и любого  $I_k$  найдется точка  $x_k \in I_k$ , в которой

$$|\omega_{mn}(x_k)| < \varepsilon/2. \quad (3.15)$$



Действительно, допустим противное. Тогда найдется интервал  $I_k$  и такие сколь угодно большие номера  $m, n$ , что для всех  $x \in I_k$  имеет место неравенство  $|\omega_{m,n}(x)| \geq \varepsilon/2$ . Следовательно, для таких  $m, n$  имеет место неравенство

$$J_{mn} = \int_a^b \omega_{mn}^2 dx \geq \int_{I_k} \omega_{mn}^2 dx \geq \frac{\varepsilon^2}{4} \delta \left( \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

противоречащее (3.12).

Из (3.14) и (3.15) следует, что для любого  $x \in I_k$  выполнено

$$|\omega_{mn}(x)| \leq |\omega_{mn}(x) - \omega_{mn}(x_k)| + |\omega_{mn}(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ при}$$

$$m, n > N(\varepsilon),$$

т. е. доказано неравенство (3.13).

6. Итак, доказано, что  $\Phi_{2n} \Rightarrow \Phi$ . Аналогично доказывается, что  $\Phi_{2n+1} \Rightarrow \Phi$ . Совершая предельный переход в (3.7) по последовательности с четными и нечетными номерами, получим

$$\bar{\varphi} = \mu A \bar{\varphi}, \quad \bar{\bar{\varphi}} = \mu A \bar{\bar{\varphi}}. \quad (3.16)$$

Отсюда  $\bar{\varphi} = \mu^2 A^2 \bar{\varphi}$  или  $(\mu A + 1)(\mu A - 1)\bar{\varphi} = 0$ . Последнее равенство возможно в двух случаях:

а)  $(\mu A - 1)\bar{\varphi} = 0$ , т. е.  $\bar{\varphi} = \mu A \bar{\varphi}$ . В этом случае  $\mu$  является собственным значением уравнения (3.4), а из (3.16) следует, что  $\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}$ ;

б)  $z = (\mu A - 1)\bar{\varphi} \neq 0$ . Тогда  $(\mu A + 1)z = 0$ , или  $z = -\mu A z$ . Следовательно,  $(-\mu)$  является собственным значением уравнения (3.4). Из (3.16) следует тогда, что  $z = \mu A \bar{\varphi} - \bar{\varphi} = \bar{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi}$ .

Таким образом, либо  $\lambda = \mu$ ,  $y = \bar{\varphi} = \bar{\bar{\varphi}}$ , либо  $\lambda = -\mu$ ,  $y = \bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}$  являются собственным значением и собственной функцией уравнения (3.4).

Замечания. Приведенные рассуждения представляют собой независимое от результатов гл. 2 доказательство существования собственного значения и собственной функции уравнения (3.4), а кроме того, дают возможность эффективного получения собственного значения и собственной функции в виде пределов последовательностей.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (-e^{x+s}) y(s) ds. \quad (3.17)$$

Выбираем начальное приближение  $y_0 \equiv 1$ . Из рекуррентного соотношения  $y_{i+1} = Ay_i$  определяем последующие приближения:

$$y_1(x) = \int_0^1 (-e^{x+s}) ds = -e^x(e-1),$$

$$y_2(x) = \int_0^1 (-e^{x+s})(-e^s)(e-1) ds = e^x(e-1) \frac{e^2-1}{2}, \dots,$$

$$y_n(x) = (-1)^n e^x (e-1) \left[ \frac{e^2-1}{2} \right]^{n-1}.$$

Находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|y_n\|}{\|y_{n+1}\|} = \frac{2}{e^2-1} = |\lambda|$ . Строим нормированные

функции  $\varphi_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} = (-1)^n \frac{e^x}{e^2-1}$ . Отсюда  $\bar{\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{2n} =$

$$= \frac{e^x}{e^2-1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{2n+1} = -\bar{\varphi}. \quad \text{Таким образом, } \bar{\varphi} - \bar{\varphi} = \frac{2e^x}{e^2-1}$$

является собственной функцией интегрального уравнения (3.17), соответствующей собственному значению  $\lambda = -\frac{2}{e^2-1}$ .

## § 9.

### ВЫРОЖДЕННЫЕ ЯДРА

**Определение.** Ядро  $K(x, s)$ , представимое конечной суммой вида

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^N \Omega_n(x) \omega_n(s) \quad (3.18)$$

называется вырожденным ядром.

**Теорема 3.5.** 1°. Вырожденное ядро имеет конечное число\* собственных значений.

2°. Если симметричное ядро  $K(x, s)$  имеет конечное число собственных значений, то оно вырождено.

**Доказательство.** Докажем 1°.

---

\* В понятие «конечное» число здесь включается также и нуль, т. е. вырожденное ядро, в частности, может вовсе не иметь собственных значений. Очевидно, в этом случае ядро должно быть несимметричным (см. ниже, пример 3).

Рассмотрим уравнение (3.1) с вырожденным ядром. Имеем

$$y(x) = \lambda \int_a^b \sum_{n=1}^N \Omega_n(x) \omega_n(s) y(s) ds = \lambda \sum_{n=1}^N \Omega_n(x) C_n, \quad (3.19)$$

где  $C_n = \int_a^b \omega_n(s) y(s) ds$ . Подставим  $y(x)$  в виде суммы (3.19) в последнее соотношение. Получим

$$C_m = \int_a^b \omega_m(s) \left[ \lambda \sum_{n=1}^N \Omega_n(s) C_n \right] ds = \lambda \sum_{n=1}^N C_n P_{nm}, \quad (3.20)$$

где  $P_{nm} = \int_a^b \Omega_n(s) \omega_m(s) ds$ .

В результате мы пришли к системе однородных алгебраических уравнений (3.20) относительно  $C_m$ . Нас интересует нетривиальное решение системы (3.20). Последнее возможно, если

$$\det \{\delta_{nm} - \lambda P_{nm}\} = 0. \quad (3.21)$$

Это соотношение является алгебраическим уравнением  $N$ -й степени относительно  $\lambda$ . Как известно, оно имеет не более  $N$  различных корней. Отсюда следует утверждение п. 1°.

Докажем 2°. Действительно, по теореме 2.11 ранг каждого собственного значения симметричного ядра  $K(x, s)$  конечен. Следовательно, число независимых собственных функций также конечно. Пусть  $y_1, \dots, y_n$  — совокупность всех линейно независимых собственных функций, приведенная к ортонормированному виду, а  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — соответствующие собственные значения (некоторые из которых могут совпадать). Рассмотрим ядро

$$H(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x) y_i(s)}{\lambda_i}.$$

Допустим, что  $H \neq 0$ . Тогда для ядра  $H(x, s)$  выполнены все требования (3.2) и у него должна быть собственная функция  $y_{n+1}(x)$ . Согласно доказанному выше  $y_{n+1}(x)$  ортогональна всем  $y_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и является собственной функцией ядра  $K(x, s)$ . Так как по условию  $y_1, \dots, y_n$  — совокупность всех линейно независимых собственных функций

ядра  $K(x, s)$ , то  $y_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x)$ . Учитывая, что

$(y_{n+1}, y_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), получим  $\|y_{n+1}\|^2 = (y_{n+1}, y_{n+1}) =$

$= \left( y_n, \sum_{i=1}^n C_i y_i \right) = \sum_{i=1}^n C_i (y_{n+1}, y_i) = 0$ . Соотношение  $\|y_{n+1}\|^2 = 0$  противоречит тому, что  $y_{n+1}(x)$  — собственная функция ядра  $K(x, s)$ . Полученное противоречие доказывает, что  $H(x, s) \equiv 0$  и, следовательно, ядро  $K(x, s)$  является вырожденным.

**З а м е ч а н и я.** 1. Утверждение 1° справедливо как для симметричных, так и для несимметричных ядер. В последнем случае собственные значения, определяемые из (3.21), и собственные функции могут, вообще говоря, оказаться комплексными.

2. В случае вырожденного ядра собственные функции могут быть определены путем решения системы алгебраических уравнений (3.20) (в которой  $\lambda$  найдено из (3.21)) с последующей подстановкой полученных значений  $C_m$  и  $\lambda$  в правую часть (3.19).

**Пример 1.** Требуется определить собственные функции и собственные значения интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (x-s) y(s) ds, \quad (3.22)$$

в котором ядро  $K(x, s) = x - s = x \cdot 1 - 1 \cdot s$  — вырожденное и несимметричное. Правая часть (3.22) представляет собой полином первой степени относительно  $x$ . Поэтому решение имеет вид  $y(x) = ax + b$ . Подставляя это выражение для  $y(x)$  в (3.22), получаем

$$ax + b = \lambda \int_0^1 (x-s)(as + b) ds = \lambda \left[ x \left( \frac{a}{2} + b \right) - \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right) \right].$$

Приравнявая коэффициенты при нулевой и первой степенях  $x$  справа и слева в этом соотношении, имеем

$$\begin{cases} a = \lambda \left( \frac{a}{2} + b \right), \\ b = -\lambda \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right). \end{cases} \quad (3.23)$$

Нетривиальное решение этой системы алгебраических уравнений существует, если определитель

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \frac{\lambda}{3} & 1 + \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда  $\lambda = \pm i\sqrt{12}$ . При этом из (3.23) следует  $a = b \times \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ . Таким образом получаются два решения:

$$\lambda_1 = i\sqrt{12}, \quad y_1(x) = C[\sqrt{12} + 3x(i - \sqrt{3})],$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{12}, \quad y_2(x) = C[\sqrt{12} - 3x(i + \sqrt{3})],$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Комплексные собственные значения получились в результате того, что ядро  $K(x, s) = x - s$  не является симметричным.

**Пример 2.** Рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 s^2 - 1) y(s) ds. \quad (3.24)$$

Ядро  $K(x, s) = x^2 s^2 - 1$  является симметричным и вырожденным.

Ищем решение уравнения (3.24) в виде  $y(x) = ax^2 + b$ . Имеем

$$ax^2 + b = \lambda \int_0^1 (x^2 s^2 - 1)(as^2 + b) ds.$$

Приравнявая коэффициенты при  $x^2$  и  $x^0$ , получим

$$a = \lambda \int_0^1 s^2 (as^2 + b) ds = \lambda \left( \frac{a}{5} + \frac{b}{3} \right),$$

$$b = -\lambda \int_0^1 (as^2 + b) ds = \lambda \left( -\frac{a}{3} - b \right).$$

Нетривиальное решение этой системы алгебраических уравнений относительно  $a$  и  $b$  существует при условии

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda}{3} \\ \frac{\lambda}{3} & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим  $\lambda_1 = \frac{9+3\sqrt{14}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{9-3\sqrt{14}}{2}$ , а из первого уравнения алгебраической системы следует  $b = 3a \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{5} \right)$ .

Таким образом получаются две собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$y_1 = a \left( x^2 + \frac{2}{3 + \sqrt{14}} - \frac{3}{5} \right), \quad y_2 = a \left( x^2 + \frac{2}{3 - \sqrt{14}} - \frac{3}{5} \right).$$

Значение  $a$  можно найти из условия  $\int_0^1 y_i^2(x) dx = 1$ .

Собственные функции  $y_1$  и  $y_2$  отвечают различным собственным значениям. Проверим ортогональность  $y_1$  и  $y_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \int_0^1 y_1(x) y_2(x) dx &= \int_0^1 \left[ \left( x^2 - \frac{3}{5} \right) + \frac{2}{3 + \sqrt{14}} \right] \left[ \left( x^2 - \frac{3}{5} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3 - \sqrt{14}} \right] dx = \int_0^1 \left[ \left( x^2 - \frac{3}{5} \right)^2 + \left( x^2 - \frac{3}{5} \right) \left( \frac{2}{3 + \sqrt{14}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{3 - \sqrt{14}} \right) + \frac{2}{3 + \sqrt{14}} \cdot \frac{2}{3 - \sqrt{14}} \right] dx = \int_0^1 \left[ x^4 - \frac{6}{5} x^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{25} + \left( x^2 - \frac{3}{5} \right) \left( -\frac{12}{5} \right) - \frac{4}{5} \right] dx = \int_0^1 \left( x^4 - \frac{18}{5} x^2 + 1 \right) dx = 0. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x \sin s y(s) ds. \quad (3.25)$$

Из уравнения (3.25) следует, что  $y(x)$  имеет вид  $y(x) = C \cos x$ ,

где  $C = \lambda \int_0^\pi \sin^2 s y(s) ds$ . Подставляя в последнее соотношение

$y(x)$  в указанном виде, получим  $C = \lambda \int_0^\pi \sin s \cdot C \cos s ds = 0$ .

Следовательно, уравнение (4.23) имеет лишь тривиальное решение при любых значениях  $\lambda$ .

# РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

## § 10.

## ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА

В предыдущей главе было доказано, что существует ортонормированная последовательность собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Тем самым для любой  $f(x) \in h[a, b]$  можно построить ряд Фурье по этим собственным функциям. Возникает вопрос: при каких условиях построенный ряд Фурье будет сходиться к функции  $f(x)$ ? Ответ на поставленный вопрос дает так называемая теорема Гильберта—Шмидта.

**Определение.** Будем говорить, что непрерывная функция  $f(x)$  представима через ядро  $K(x, s)$ , если существует непрерывная на  $[a, b]$  функция  $h(x)$  такая, что

$$f(x) = \int_a^b K(x, s) h(s) ds, \quad (4.1)$$

или

$$f = Ah. \quad (4.2)$$

**Теорема 4.1** (Теорема Гильберта—Шмидта). Если  $f(x)$  представима через симметричное ядро  $K(x, s)$ , то она может быть разложена в ряд

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i y_i(x), \quad (4.3)$$

где  $f_i = \int_a^b f(x) y_i(x) dx$ , причем ряд (4.3) сходится на  $[a, b]$  к  $f(x)$  абсолютно и равномерно.

**Доказательство.** Сначала докажем, что в случае невырожденного ядра, т. е. бесконечного множества собственных значений, ряд в правой части (4.3) сходится абсолютно и равномерно. Воспользуемся критерием Коши и рассмотрим сумму  $\sum_{i=n}^{n+m} |f_i| |y_i(x)|$ . Выражение для коэффициента

Фурье  $f_i$ , указанный в теореме, имеет вид  $f_i = (f, y_i)$ . Поэтому в силу (3.2)

$$f_i = (Ah, y_i) = (h, Ay_i) = \left( h, \frac{y_i}{\lambda_i} \right) = \frac{h_i}{\lambda_i}. \quad (4.4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{n+m} |f_i| |y_i(x)| &\leq \sum_{i=n}^{n+m} \frac{|h_i|}{|\lambda_i|} |y_i(x)| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=n}^{n+m} h_i^2} \sqrt{\sum_{i=n}^{n+m} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

(последнее звено в этой цепочке неравенств основано на неравенстве Коши—Буняковского применительно к скалярному произведению вида  $(a, b) = \sum_{i=1}^p a_i b_i$  в конечномерном линейном пространстве, элементами которого являются системы чисел  $a_1, \dots, a_p$ ).

Для дальнейшего заметим, что в силу соотношения  $\frac{y_i(x)}{\lambda_i} = \int_a^b K(x, s) y_i(s) ds$  величина  $\frac{y_i(x)}{\lambda_i}$  является коэффициентом Фурье ядра  $K(x, s)$ , рассматриваемого как функция  $s$ .

Воспользуемся теперь неравенством Бесселя [14] для  $h(x)$  и  $K(x, s)$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 \leq \int_a^b h^2(s) ds, \quad (4.6)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leq \int_a^b K^2(x, s) ds. \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует (применяем, как и в гл. 2, обозначение  $\bar{K} = \sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} |K(x, s)|$ ), что

$$\sum_{i=n}^{n+m} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leq \int_a^b \bar{K}^2 ds = \bar{K}^2(b-a),$$

а из (4.6) (в силу необходимости критерия Коши для сходящегося числового ряда слева в (4.6)) следует, что  $\sum_{i=n}^{n+m} h_i^2 < \frac{\varepsilon^2}{\bar{K}^2(b-a)}$  при  $n > N(\varepsilon)$ ,  $m > 0$ . Поэтому из (4.5) имеем

$$\sum_{i=n}^{n+m} |f_i| |y_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\bar{K} \sqrt{b-a}} \bar{K} \sqrt{b-a} = \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon), m > 0$$



для всех  $x \in [a, b]$ , а это в силу достаточности критерия Коши означает абсолютную и равномерную на  $[a, b]$  сходимость ряда справа в (4.3) к некоторой функции  $\tilde{f}(x)$ .

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i y_i(x).$$

Функция  $\tilde{f}(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  в силу известной теоремы анализа.

Остается доказать, что  $\tilde{f}(x) = f(x)$ . Обозначим  $\omega(x) = f(x) - \tilde{f}(x)$ . Убедимся, что  $\omega$  ортогональна ко всем  $y_i$ . Действительно, учитывая доказанную равномерную сходимость ряда справа в (4.3) и вытекающую отсюда возможность его почленного интегрирования [14], будем иметь  $(\omega, y_i) = (f, y_i) - (\tilde{f}, y_i) = f_i - \sum_{n=1}^{\infty} f_n (y_n, y_i) = f_i - f_i = 0$ . Следовательно, по теореме 2.12  $A\omega = 0$ . Далее:  $\|\omega\|^2 = (\omega, \omega) = (\omega, f - \tilde{f}) = (\omega, f) - (\omega, \tilde{f}) = (\omega, Ah) - \sum_{i=1}^{\infty} f_i (\omega, y_i) = (A\omega, h) = (0, h) = 0$ . Следовательно,  $\|\omega\| = 0$ , а значит,  $\omega(x) = 0$ , т. е.  $f(x) = \tilde{f}(x)$ . Теорема доказана.

## § 11.

### ПОВТОРНЫЕ ЯДРА

**1. Определение и свойства повторных ядер.** Выше мы ввели оператор Фредгольма  $A$  формулой

$$Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds. \quad (4.8)$$

Рассмотрим теперь операторы  $A^2y, \dots, A^ny, \dots$ . Оказывается, для оператора  $A^ny$  можно дать интегральное представление, аналогичное (4.8):

$$A^ny = \int_a^b K_n(x, s) y(s) ds, \quad (4.9)$$

где  $K_n(x, s)$  — так называемое *повторное ядро порядка  $n$* .

Получим выражение для  $K_n(x, s)$  через ядро  $K(x, s)$ , которое будем называть основным. Обозначим  $Ay = z$ . Имеем

$$\begin{aligned} A^2y = Az &= \int_a^b K(x, s) z(s) ds = \int_a^b K(x, s) \left[ \int_a^b K(s, t) y(t) dt \right] ds = \\ &= \int_a^b y(t) \left[ \int_a^b K(x, s) K(s, t) ds \right] dt = \int_a^b K_2(x, t) y(t) dt. \end{aligned}$$

Итак, повторное ядро порядка 2 выражается формулой

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt. \quad (4.10)$$

**Теорема 4.2.** Для повторных ядер справедливо соотношение

$$K_n(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt. \quad (4.11)$$

**Доказательство.** Формула (4.11) справедлива для  $n=2$  (см. (4.10)). Допустим, что она справедлива для  $n=1, \dots, p$ . Докажем ее справедливость для  $n=p+1$ . Обозначим  $A^p y = z$ . Имеем

$$\begin{aligned} A^{p+1} y &= Az = \int_a^b K(x, s) \left[ \int_a^b K_p(s, t) y(t) dt \right] ds = \\ &= \int_a^b y(t) \left[ \int_a^b K(x, s) K_p(s, t) ds \right] dt = \int_a^b K_{p+1}(x, t) y(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом,  $K_{p+1}(x, s)$  выражается формулой

$$K_{p+1}(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_p(t, s) dt$$

и теорема доказана.

**Теорема 4.3.** Если ядро  $K(x, s)$  удовлетворяет условиям (3.2), то этими же свойствами обладает повторное ядро любого порядка.

**Доказательство.** Проверим сначала симметрию  $K_2(x, s)$ . Имеем

$$K_2(s, x) = \int_a^b K(s, t) K(t, x) dt = \int_a^b K(t, s) K(x, t) dt = K_2(x, s).$$

Докажем теперь симметрию  $K_n(x, s)$ , рассуждая по индукции. Пусть  $K_n(x, s)$ ,  $n=2, \dots, p$ , симметричны. Пользуясь (4.11), имеем

$$\begin{aligned} K_{p+1}(s, x) &= \int_a^b K(s, t) K_p(t, x) dt = \int_a^b K(s, t) K_p(x, t) dt = \\ &= \int_a^b K(s, t) dt \int_a^b K(x, \xi) K_{p-1}(\xi, t) d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(s, t) K_{p-1}(t, \xi) dt = \int_a^b K(x, \xi) K_p(s, \xi) d\xi = \\
&= \int_a^b K(x, \xi) K_p(\xi, s) d\xi = K_{p+1}(x, s).
\end{aligned}$$

Доказательство непрерывности и вещественности ядра  $K_n(x, s)$  (также по индукции) сложности не представляет.

Докажем, что  $K_n(x, s) \not\equiv 0$ . Допустим противное. Предположим, что  $K_i(x, s) \equiv 0$  для  $i = 1, \dots, n-1$ , а  $K_n(x, s) \equiv 0$ . Рассмотрим вначале случай, когда  $n$  четно:  $n = 2m$ . Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_a^b K_{2m}(x, s) y(s) ds = A^{2m} y = A^m (A^m y) = \\
&= \int_a^b K_m(x, t) \int_a^b K_m(t, s) y(s) ds = \int_a^b \left[ \int_a^b K_m(x, t) K_m(t, s) dt \right] y(s) ds.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$K_{2m}(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) K_m(t, s) dt.$$

Полагая в этом равенстве  $x = s$ , получим

$$K_{2m}(x, x) = \int_a^b K_m^2(x, t) dt.$$

По условию  $K_{2m}(x, x) = 0$  при любых  $x \in [a, b]$ . Отсюда имеем  $K_m(x, t) \equiv 0$ , что противоречит сделанному выше предположению.

Пусть теперь  $n$  нечетно:  $n = 2m + 1$ ,  $K_i(x, s) \not\equiv 0$  при  $i < n$ , а  $K_n(x, s) \equiv 0$ . Тогда, очевидно,

$$K_{n+1}(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_n(t, s) dt \equiv 0.$$

В то же время  $n+1 = 2m+2$  есть четный номер, и по доказанному  $K_{n+1}(x, s) \not\equiv 0$ . Теорема доказана.

**2. Разложение повторного ядра по собственным функциям.** Равенство (4.11) говорит о том, что  $K_n(x, s)$  как функция  $x$  представима через ядро  $K(x, s)$ , а роль  $h(t)$  играет  $K_{n-1}(t, s)$  как функция  $t$ . Поэтому по теореме 4.1 для  $K_n(x, s)$  справедливо представление (4.3), которое запишем в виде

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_a^b K_n(t, s) y_i(t) dt \right] y_i(x). \quad (4.12)$$

Рассмотрим выражение для коэффициента Фурье, т. е. выражение  $\int_a^b K_n(t, s) y_i(t) dt$ . Имеем  $y_i = \lambda_i A y_i = \lambda_i A(\lambda_i A y_i) = \lambda_i^2 A^2 y_i = \dots = \lambda_i^n A^n y_i$ . Это означает, что  $\int_a^b K_n(t, s) y_i(t) dt = \frac{y_i(s)}{\lambda_i^n}$ . Подставляя  $\frac{y_i(s)}{\lambda_i^n}$  в (4.12), приходим к окончательной форме разложения

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x) y_i(s)}{\lambda_i^n}. \quad (4.13)$$

**Теорема 4.4.** При  $n \geq 2$  справедливо разложение (4.13), причем ряд сходится абсолютно и равномерно по совокупности аргументов.

**Доказательство.** Абсолютная сходимость ряда (4.13) и его равномерная сходимость по каждому аргументу, если другой аргумент фиксирован, следует из теоремы Гильберта—Шмидта. Чтобы доказать равномерную сходимость по совокупности аргументов, воспользуемся критерием Коши. Имеем

$$\sum_{i=p}^{p+m} \frac{|y_i(x)| |y_i(s)|}{|\lambda_i|^n} \leq \sqrt{\sum_{i=p}^{p+m} \frac{y_i^2(x)}{|\lambda_i|^n}} \sqrt{\sum_{i=p}^{p+m} \frac{y_i^2(t)}{|\lambda_i|^n}}. \quad (4.14)$$

Так как  $n \geq 2$ , а  $|\lambda_i| \rightarrow \infty$ , то члены ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{|\lambda_i|^n} \quad (4.15)$$

начиная с достаточно большого номера  $i$  мажорируются членами ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2}, \quad (4.16)$$

сходящегося в силу уже доказанного к  $K_2(x, x)$ . Так как  $K_2(x, x)$  является непрерывной функцией, а члены ряда (4.16) неотрицательны, то в силу теоремы Дини [14] ряд (4.16) сходится равномерно. Следовательно, мажорируемый им ряд (4.15) также сходится равномерно. Тогда в силу

необходимости критерия Коши для этого ряда получим, что для  $\forall \varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$\sum_{i=p}^{p+m} \frac{y_i^2(x)}{|\lambda_i|^n} < \varepsilon$$

для всех  $x \in [a, b]$ , если только  $p > N(\varepsilon)$ ,  $m > 0$ . Теперь из (4.14) будем иметь  $\sum_{i=p}^{p+m} \frac{|y_i(x)| |y_i(s)|}{|\lambda_i|^n} \leq \varepsilon$  при  $p > N(\varepsilon)$ ,  $m > 0$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $s \in [a, b]$ , а это значит, что ряд (4.13) сходится абсолютно и равномерно по совокупности аргументов. Теорема доказана.

## § 12.

### ТЕОРЕМА МЕРСЕРА

Разложение Фурье типа (4.13) можно формально написать и для самого  $K(x, s)$

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x) y_i(s)}{\lambda_i}. \quad (4.17)$$

Но поскольку  $K(x, s)$ , вообще говоря, не является представимой через симметричное ядро функцией, то вопрос о сходимости ряда (4.17) к  $K(x, s)$  остается открытым.

Ответ на этот вопрос дает теорема, называемая теоремой Мерсера.

**Определение.** Ядро  $K(x, s)$  называется положительно-определенным, если все его собственные значения  $\lambda_i$  удовлетворяют неравенству  $\lambda_i > 0$ .

**Теорема 4.5** (теорема Мерсера). Для положительно-определенного ядра  $K(x, s)$  справедливо равенство (4.17), причем ряд сходится абсолютно и равномерно по совокупности аргументов, при  $x \in [a, b]$ ,  $s \in [a, b]$ .

Доказательство основано на нескольких леммах.

**Лемма 4.1.** Пусть  $p(x)$  — любая непрерывная на  $[a, b]$  функция, а  $K(x, s)$  — положительно-определенное ядро. Тогда справедливо неравенство

$$I = \int_a^b \int_a^b K(x, s) p(x) p(s) dx ds \geq 0. \quad (4.18)$$

**Доказательство.** Запишем  $I$  в виде  $I = \int_a^b p(x) dx \int_a^b K(x, s) p(s) ds$ . Величина  $\int_a^b K(x, s) p(s) ds$  является, очевидно, функ-

цией, представимой через ядро  $K(x, s)$ . Следовательно, по теореме Гильберта—Шмидта справедливо равенство

$$\int_a^b K(x, s)p(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{\lambda_i} y_i(x), \quad (4.19)$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно. Умножая равенство (4.19) на  $p(x)$  и интегрируя (справа можно интегрировать почленно в силу равномерной сходимости ряда),

получим  $I = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^2}{\lambda_i}$ , где правая часть, очевидно, неотрица-

тельна. Таким образом,  $I \geq 0$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.2.** Если  $K(x, s)$  — положительно-определенное ядро, то  $K(x, x) \geq 0$  при  $a \leq x \leq b$ .

Доказательство проведем от противного. Пусть  $K(x_0, x_0) < 0$ , где  $a < x_0 < b$ . В силу непрерывности  $K(x, s)$  найдется окрестность точки  $(x_0, x_0)$ , задаваемая неравенствами  $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ ,  $x_0 - \delta \leq s \leq x_0 + \delta$ , в которой  $K(x, s) < 0$ .

Пусть  $p(x)$  — непрерывная функция вида

$$p(x) = \begin{cases} p_0(x) > 0 & (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta), \\ 0 & (a \leq x \leq x_0 - \delta, x_0 + \delta \leq x \leq b). \end{cases}$$

Такая непрерывная функция, очевидно, существует, и для

нее  $I = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p(x)dx \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K(x, s)p(s)ds < 0$ , что противоречит ут-

верждению леммы 4.1. Мы доказали, что  $K(x_0, x_0) \geq 0$  при  $x_0 \in (a, b)$ . Соотношение  $K(x_0, x_0) \geq 0$  остается выполненным при  $x_0 = a$  и  $x_0 = b$  в силу непрерывности функции  $K(x, x)$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.3.** Пусть ряд справа в (4.17) сходится равномерно относительно одного из переменных (для определенности относительно  $s$ ), а другое переменное (для определенности  $x$ ) фиксировано. Тогда равенство (4.17) справедливо.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[ K(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i} \right]^2 ds = \int_a^b K^2(x, s)ds - \\ & - 2 \int_a^b K(x, s) \left( \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i} \right) ds + \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i} \right)^2 ds = \\ & = K_2(x, x) - 2 \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2} = K_2(x, x) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к пределу в полученном равенстве

$$\int_a^b \left[ K(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i} \right]^2 ds = K_s(x, x) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i}.$$

В силу (4.13) справа получим нуль. Слева же предельный переход совершим под знаком интеграла (что возможно в силу равномерной сходимости относительно  $s$  [14]). Тогда получим

$$\int_a^b \left[ K(x, s) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i} \right]^2 ds = 0,$$

откуда следует справедливость равенства (4.17).

**Лемма 4.4.** Ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i}$  сходится, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i} \leq K(x, x). \quad (4.20)$$

**Доказательство.** В силу следствия теоремы 4.3 выражение

$$K^{(n+1)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i} \quad (4.21)$$

представляет собой ядро, имеющее те же собственные значения, что и  $K(x, s)$ , за исключением  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Таким образом,  $K^{(n+1)}(x, s)$  также положительно-определенное ядро. Тогда в силу леммы 4.2 имеем  $K^{(n+1)}(x, x) \geq 0$ , т. е.

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i} \leq K(x, x),$$

другими словами, частичная сумма ряда в (4.20) ограничена сверху. Так как члены этого ряда неотрицательны, то он сходится и выполнено неравенство (4.20). Лемма доказана.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы Мерсера. Имеем

$$\sum_{i=n}^{n+p} \frac{|y_i(x)| |y_i(s)|}{\lambda_i} \leq \sqrt{\sum_{i=n}^{n+p} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i}} \sqrt{\sum_{i=n}^{n+p} \frac{y_i^2(s)}{\lambda_i}}.$$

$$\text{В силу леммы 4.4} \quad \sum_{i=n}^{n+p} \frac{y_i^2(s)}{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(s)}{\lambda_i} \leq K(s, s) \leq \tilde{K} =$$

$= \sup_{a \leq s \leq b} |K(s, s)|$ . В силу критерия Коши для сходящегося ряда слева в (4.20)

$$\sum_{i=n}^{n+p} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i} < \frac{\varepsilon^2}{\bar{K}}$$

при  $n > N(x, \varepsilon)$ ,  $\forall p > 0$ . Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n+p} \frac{|y_i(x)| |y_i(s)|}{\lambda_i} < \varepsilon$$

при  $n > N(x, \varepsilon)$ ,  $\forall p > 0$ ,  $\forall s \in [a, b]$ , а это означает, что ряд в (4.17) сходится равномерно относительно  $s$  при фиксированном  $x$ . Следовательно, равенство (4.17) обеспечено леммой 4.3.

Остается доказать равномерную сходимость ряда в (4.17) по совокупности аргументов. В силу равенства (4.17), которое теперь доказано, в (4.20) также имеем равенство  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i} = K(x, x)$ , а отсюда в силу теоремы Дини [14] делаем заключение о равномерной сходимости этого ряда относительно  $x$ . Дальнейшие рассуждения в точности совпадают с приведенными в теореме 4.4 для доказательства равномерной сходимости ряда (4.13) по совокупности аргументов. Теорема доказана.

**Замечание.** Теорема Мерсера остается справедливой, если наряду с положительными имеет конечное число отрицательных собственных значений. Действительно, в этом случае, начиная с некоторого номера, собственные значения  $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$  положительны. Тогда  $K^{(n+1)}(x, s)$  (см. (4.21)) является положительно-определенным ядром, и по теореме Мерсера  $K^{(n+1)}(x, s) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i}$ , причем ряд сходится

абсолютно и равномерно относительно  $x$  и  $s$ . Пользуясь теперь (4.21), получим то, что требуется.

### § 13.

#### ОСЛАБЛЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ НА ЯДРО

До сих пор мы рассматривали уравнения, в которых ядро предполагалось действительным, непрерывным и симметричным, а  $x$  и  $s$  были координатами точки на прямой. Однако многие задачи математической физики приводят к уравнениям с ядрами, не обладающими указанными свойствами, а в качестве переменных фигурируют координаты точек пространства (см. § 2). Поэтому уточним, какие из наложенных требований существенны, а какие взяты ради простоты изложения.



1. То, что ядро действительно не является существенным. Часто рассматриваются интегральные уравнения с комплексными ядрами. Ядро  $K^*(s, x)$  (\* означает комплексно сопряженную величину) называется *эрмитово сопряженным* ядру  $K(x, s)$ . Если  $K^*(s, x) = K(x, s)$ , то ядро называется *эрмитовым*.

Можно развить абстрактную теорию операторов в комплексном линейном пространстве и получить для интегральных уравнений с эрмитовыми ядрами теорему существования собственных значений, аналогичную полученной в гл. 2. Можно также повторить с некоторыми видоизменениями рассуждения, проведенные в гл. 3 и 4, используя в качестве скалярного произведения  $(\varphi, \psi)$  величину  $\int_a^b \varphi(x)\psi^*(x)dx$ , и получить аналогичные результаты. Отличие состоит лишь в том, что разложения в ряды будут содержать функции, комплексно сопряженные к собственным. Например, разложение в ряд для повторного ядра  $K_m(x, s)$  имеет вид  $K_m(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) y_n^*(s)}{\lambda_n^m}$ . Остальные результаты, включая доказательство действительности  $\lambda$ , остаются в силе [1].

2. Все полученные результаты устанавливаются совершенно аналогично в случае, когда в интегральном уравнении интегралы являются многократными, а вместо  $x$  и  $s$  фигурируют координаты точек пространства.

3. Требование непрерывности ядра можно ослабить [1]. А именно результаты, относящиеся к существованию собственных значений, останутся справедливыми и для *полярных ядер*, т. е. ядер, представимых в виде

$$K(x, s) = \frac{\Phi(x, s)}{|x-s|^\alpha}, \quad (4.22)$$

где  $\Phi(x, s)$  — непрерывная функция, а  $\alpha$  — число, меньшее размерности  $n$  пространства  $x$ . Например, в одномерном случае  $\alpha < 1$ , а в трехмерном (когда  $x$  — совокупность координат точки в трехмерном пространстве)  $\alpha < 3$ . Под  $|x-s|$  в последнем случае следует понимать расстояние между точками  $x$  и  $s$ .

Если ядро имеет вид (4.22) и  $\alpha < n/2$ , то оно называется *слабополярным*. Можно показать, что теорема Гильберта—Шмидта и следствия из нее остаются в силе для слабополярных эрмитовых ядер.

4. Требование симметрии или эрмитовости ядра при доказательстве существования собственных значений снять нельзя. У несимметричного ядра может не существовать собственных значений (см., например, уравнение (3.25)).

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ (ЗАДАЧА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ)

## § 14.

## ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ

Чтобы пояснить постановку задачи на собственные значения, рассмотрим характерный физический пример—задачу о поперечных колебаниях струны [27]

$$\rho(x)u_{tt} = ku_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (5.2)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = v^0(x). \quad (5.3)$$

Считаем плотность материала струны  $\rho(x) > 0$ , а  $u^0(x)$  и  $v^0(x)$ —дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, равными нулю при  $x=0$  и  $x=l$ . Величина  $k$  является параметром и представляет собой абсолютную величину силы натяжения покоящейся струны.

Будем сначала искать частное решение уравнения (5.1), удовлетворяющее только краевым условиям (5.2). Попробуем найти его в виде  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Подставляя решение в таком виде в (5.1), получим  $\rho XT'' = kX''T$ , откуда  $\frac{T''(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{\rho(x)X(x)}$ . Левая часть этого равенства зависит только от  $t$ , а правая—только от  $x$ . Равенство может быть выполнено при всех значениях  $t$  и  $x$  лишь в случае, когда обе его части равны константе:

$$\frac{T''(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{\rho(x)X(x)} = -\lambda, \quad (5.4)$$

где  $\lambda$ —некоторая пока неизвестная постоянная. Отсюда

$$X''(x) + \lambda \rho(x)X(x) = 0. \quad (5.5a)$$

Из условий (4.2) находим  $X(0)T(t) = 0$  и  $X(l)T(t) = 0$ . Поскольку нас интересуют нетривиальные решения и  $T(t) \neq 0$ , то

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (5.5b)$$

Итак, для функции  $X(x)$  мы получили краевую задачу (5.5), состоящую из уравнения (5.5a) и условий (5.5b). В

этой задаче требуется определить значения  $\lambda$ , при которых имеются нетривиальные решения  $X(x)$ , а также определить сами эти решения. Числа  $\lambda$  называются собственными значениями, а  $X(x)$  — собственными функциями задачи (5.5). Задача (5.5) является частным случаем так называемой задачи Штурма—Лиувилля, более общая постановка которой будет рассмотрена в § 15.

Решение уравнения (5.5а), а следовательно, и всей задачи (5.5) не может быть найдено элементарным образом. Как оказывается, теория интегральных уравнений дает возможность доказать существование решения задачи (5.5) и установить те свойства собственных значений и собственных функций, которые позволяют довести решение исходной задачи (5.1)—(5.3) о колебаниях струны до конца. Чтобы понять, что это за свойства, рассмотрим задачу (5.1)—(5.3) в простейшем случае  $\rho = \text{const}$ , когда она решается элементарно.

Итак, пусть  $\rho = \text{const}$ . Нетрудно видеть, что при  $\lambda < 0$  нетривиального решения задачи (5.5) не существует. Действительно, если  $\lambda < 0$ , то  $X(x) = Ae^{-\sqrt{|\lambda|\rho}x} + Be^{\sqrt{|\lambda|\rho}x}$ . Из условия  $X(0) = 0$  получим  $B = -A$ . Условие  $X(l) = 0$  дает  $X(l) = 2B \operatorname{sh} \sqrt{|\lambda|\rho}l = 0$ , откуда  $B = 0$  и, следовательно,  $X(x) \equiv 0$ . Если же  $\lambda = 0$ , то  $X(x) = ax + b$ ,  $X(0) = b = 0$ ,  $X(l) = al = 0$ . Следовательно,  $a = 0$  и  $X(x) \equiv 0$ .

Рассмотрим случай  $\lambda > 0$ . Тогда  $X(x) = A \cos \sqrt{\lambda\rho}x + B \sin \sqrt{\lambda\rho}x$ . Кривые условия (5.5б) дают  $X(0) = A = 0$ ,  $X(l) = B \sin \sqrt{\lambda\rho}l = 0$ . Условие  $B \neq 0$ , обеспечивающее нетривиальность  $X(x)$ , приводит к требованию  $\sin \sqrt{\lambda\rho}l = 0$ , откуда получим последовательность собственных значений  $\sqrt{\lambda_n\rho}l = \pi n$  или  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \frac{1}{\rho}$ . Соответствующие собственные функции

имеют вид  $X_n(x) = B_n \sin \frac{\pi n}{l}x$ , где постоянная  $B_n$  остается не-

определенной. Заметим, что  $n = 0$  дает тривиальное решение, а отрицательные  $n$  дают собственные функции, отличающиеся от полученных только знаком, и новых собственных функций, линейно независимых от построенных, значения  $n < 0$  не дают.

Каждому  $\lambda_n$  отвечает согласно (5.4) следующее уравнение для  $\frac{1}{2}T(t)$  ( $T$  тоже получает тем самым индекс  $n$ ):  $T_n'' + k\lambda_n T_n = 0$ . Отсюда

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{\pi n}{l}at + D_n \sin \frac{\pi n}{l}at, \quad a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}.$$

(Заметим, что величина  $k\lambda_n$  имеет смысл квадрата частоты собственных колебаний струны.) Тем самым мы получаем последовательность решений уравнения (5.1).

$$u_n(x, t) = T_n X_n = \left( C_n \cos \frac{\pi n}{l} at + D_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

(постоянные  $C_n B_n$  и  $D_n B_n$  вновь обозначим через  $C_n$  и  $D_n$ ).

Попытаемся удовлетворить начальным условиям (5.3), разыскивая решение уравнения (5.1) в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{\pi n}{l} at + D_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (5.6)$$

Краевые условия (5.2) при этом будут удовлетворены, так как каждое  $u_n(x, t)$  им удовлетворяет. Решение задачи (5.1)–(5.3) в такой форме имеет смысл разложения функции, описывающей колебания струны, по системе стоячих волн. Подставляя (5.6) в (5.3), получим

$$u^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$v^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} D_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Написанные равенства представляют собой разложения  $u^0(x)$  и  $v^0(x)$  в ряд Фурье по  $\sin \frac{\pi n}{l} x$ . Пользуясь теорией тригонометрических рядов Фурье [14], можно определить  $C_n$  и  $D_n$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l u^0(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

$$\frac{\pi n}{l} a D_n = \frac{2}{l} \int_0^l v^0(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Построение решения задачи (5.1)–(5.3) при  $\rho = \text{const}$  закончено.

**Замечание.** Задача о колебаниях струны рассматривается лишь для пояснения постановки задачи Штурма—Лиувилля. Поэтому здесь и ниже мы не будем останавливаться на обосновании полученного решения задачи (5.6) в виде ряда, т. е. исследовать сходимость ряда и возможность его почленного дифференцирования по  $x$  и  $t$ , отсылая интересующихся к [27].

Проанализируем процесс построения решения (5.6). Он основан, во-первых, на существовании бесконечной последовательности положительных значений  $\lambda$  и соответствующей последовательности ортогональных между собой собственных функций задачи (5.5); во-вторых, на возможности разложения начальных условий  $u^0(x)$  и  $v^0(x)$  по этим собственным функциям. Если доказать, что отмеченные свойства задачи (5.5) сохраняются при произвольном  $\rho(x) > 0$ , то решение задачи (5.1)—(5.3) о колебаниях струны может быть построено тем же методом, что и в случае  $\rho = \text{const}$ .

В следующем параграфе мы изучим задачу Штурма—Лиувилля в более общем виде, чем (5.5), и установим свойства ее собственных значений и собственных функций. Пользуясь этими свойствами, мы в конце § 15 вернемся к задаче (5.1)—(5.3) и построим ее решение при произвольном  $\rho(x) > 0$ .

## § 15.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ ПУТЕМ СВЕДЕНИЯ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

**1. Сведение к интегральному уравнению.** Сформулируем задачу Штурма—Лиувилля в следующей постановке, охватывающей случай, рассмотренный в § 14:

$$\begin{cases} L[u] + \lambda \rho(x)u = 0, & (5.7a) \\ u(a) = 0 \quad u(b) = 0. & (5.7b) \end{cases}$$

Здесь  $\lambda$  — параметр, а  $L[u] = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u$ . Функция

$\rho(x)$  предполагается непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$ , функции  $q(x)$ ,  $p(x)$  — непрерывными. Кроме того, будем считать, что  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ .

**Определение.** Значения параметра  $\lambda$ , при которых существует нетривиальное решение задачи (5.7), называются собственными значениями задачи Штурма—Лиувилля, а сами нетривиальные решения называются собственными функциями задачи Штурма—Лиувилля.

**Замечание.** Краевые условия могут иметь и более сложный вид [25], но мы ограничимся рассмотрением краевых условий (5.7б).

**Лемма 5.1.** При  $p(x) > 0$  и  $q(x) \geq 0$  отличное от константы решение уравнения  $L[u] = 0$  не может достигать положительно-го максимального значения или отрицательного минимального значения во внутренних точках отрезка  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Пусть решение уравнения  $L[u] = 0$  достигает в некоторой внутренней точке  $x_0$  максимального на  $[a, b]$  значения  $u(x_0) = M > 0$ . Обозначим через  $\{x\}$  совокупность тех точек интервала  $[a, b]$ , где  $u(x) = M$ . Поскольку  $u(x) \neq \text{const}$ , то найдется точка  $x_1$ , которая будет являться внутренней для  $[a, b]$  и граничной для множества  $\{x\}$ . Для определенности будем считать, что  $x_0 \leq x_1 < b$ . В точках множества  $\{x\}$  выполнено  $u'(x) = 0$ . По непрерывности это соотношение остается справедливым и в точке  $x_1$ . Далее, в силу непрерывности  $u'(x)$  найдется  $\varepsilon$ -полукрестность точки  $x_1$  такая, что при  $x_1 < x \leq x_1 + \varepsilon = x_2 \leq b$  имеет место неравенство  $0 < u(x) < M$  и выполнено  $u'(x_2) < 0$ . Интегрируем соотношение  $L[u] = 0$  на участке от  $x_1$  до  $x_2$ , учитывая,

что  $u'(x_1) = 0$ . Получаем  $p(x_2)u'(x_2) - \int_{x_1}^{x_2} q(\xi)u(\xi)d\xi = 0$ . Это ра-

венство невозможно, поскольку  $p(x_2)u'(x_2) < 0$ , а  $\int_{x_1}^{x_2} q(\xi)u(\xi)d\xi \geq 0$ .

Полученное противоречие доказывает, что решение уравнения  $L[u] = 0$  не может достигать во внутренних точках положительного максимального значения. Аналогично доказывается утверждение леммы о минимальном значении.

**Замечание.** Если решение некоторой задачи не может достигать максимального значения во внутренних точках области, то говорят, что решение задачи удовлетворяет принципу максимума. В лемме 5.1 доказано, что решение уравнения  $L[u] = 0$  удовлетворяет принципу максимума.

**Лемма 5.2. Задача**

$$\begin{aligned} L[u] &= f, \\ u(a) &= 0, \quad u(b) = 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

*имеет единственное решение.*

**Доказательство.** Допустим, что существуют два различных решения  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  задачи (5.8). Пусть  $z(x) = u_1(x) - u_2(x)$ . Функция  $z(x) \neq 0$  удовлетворяет условиям  $z(a) = z(b) = 0$ . Отсюда следует, что  $z(x)$  достигает либо положительного максимального значения, либо отрицательного минимального значения (либо и то и другое) на интервале  $(a, b)$ . Это противоречит лемме 5.1, поскольку  $L[z] = 0$ . Лемма 5.2 доказана.

Из леммы 5.2 следует [25], что решение задачи (5.8) представимо в виде

$$u(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad (5.9)$$

где  $G(x, s)$  — функция Грина. При этом  $G(x, s) = G(s, x)$ .

Пользуясь (5.9), можно свести задачу (5.7) к следующему интегральному уравнению (для этого надо перенести  $\lambda u$  в правую часть и рассматривать как  $f$ ):

$$u(x) = -\lambda \int_a^b G(x, s) \rho(s) u(s) ds. \quad (5.10)$$

Ядро полученного интегрального уравнения (5.10) несимметрично.

Преобразуем (5.10), умножив левую и правую части на  $\sqrt{\rho(x)}$ :

$$\sqrt{\rho(x)} u(x) = -\lambda \int_a^b G(x, s) \sqrt{\rho(x)} \sqrt{\rho(s)} \sqrt{\rho(s)} u(s) ds.$$

Полагая теперь

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho(x)} u(x) &= y(x), \\ -G(x, s) \sqrt{\rho(x)} \sqrt{\rho(s)} &= K(x, s), \end{aligned} \quad (5.11)$$

приходим к следующему интегральному уравнению относительно  $y(x)$  с симметричным ядром

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds. \quad (5.12)$$

Интегральное уравнение (5.12), как видно из самого построения, эквивалентно задаче Штурма—Лиувилля (5.7), т. е. если  $u(x)$  и  $\lambda$  — собственная функция и собственное значение задачи (5.7), то  $y(x) = \sqrt{\rho(x)} u(x)$  и  $\lambda$  являются собственной функцией и собственным значением интегрального уравнения (5.12), и наоборот, если  $y(x)$  и  $\lambda$  — собственная функция и собственное значение интегрального уравнения (5.12), то  $u(x) = \frac{y(x)}{\sqrt{\rho(x)}}$  и  $\lambda$  являются собственной функцией и собственным значением задачи (5.7).

**Определение.** Ядро  $K(x, s)$  называется замкнутым, если из равенства  $Af = \int_a^b K(x, s) f(s) ds = 0$  следует, что  $f(x) \equiv 0$ .

**Лемма 5.3.** Ядро  $K(x, s)$  интегрального уравнения (5.12) является замкнутым.

Действительно, пусть  $\int_a^b K(x, s) f(s) ds = 0$ . Обозначим

$$z(x) = \int_a^b G(x, s) \sqrt{\rho(s)} f(s) ds. \quad (5.13)$$

Из условия леммы имеем  $-\sqrt{\rho(x)} z(x) = \int_a^b K(x, s) f(s) ds = 0$ , т. е.  $z(x) \equiv 0$ . С другой стороны, в силу (5.13) функция  $z(x)$  удовлетворяет уравнению  $Lz = \sqrt{\rho} f$ , а так как  $z \equiv 0$ , то и  $Lz \equiv 0$ , а значит,  $\sqrt{\rho(x)} f(x) = 0$ . Отсюда следует  $f(x) \equiv 0$ . Лемма доказана.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы:

**Теорема 5.1.** *Задача Штурма—Лиувилля (5.7) эквивалентна интегральному уравнению (5.12) с симметричным замкнутом ядром.*

**2. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля.** Пользуясь интегральным уравнением (5.12), можно изучить свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля (5.7).

**Теорема 5.2.** *Задача Штурма—Лиувилля (5.7) имеет бесконечное число (последовательность) собственных значений.*

**Доказательство.** Существование собственных значений вытекает из теоремы 3.1. Нужно только убедиться, что их число не может быть конечным. Для этого достаточно доказать, что замкнутое ядро имеет бесконечно много собственных значений.

Действительно, допустим, что интегральное уравнение имеет конечное число собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  и им отвечают собственные функции  $y_1, \dots, y_p$ . Так как пространство  $h[a, b]$  бесконечномерно, то найдется  $y(x) \neq 0$  и такая, что  $y_1, \dots, y_p, y$  линейно независимы. Можно считать, что  $y$  ортогональна всем  $y_1, \dots, y_p$  (если нет, то можно построить такую  $y(x)$  методом ортогонализации). Из того, что  $(y, y_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, p$ ), следует, что  $Ay = 0$  (теорема 2.12), а тогда в силу замкнутости ядра имеем  $y = 0$  и получаем противоречие. Тем самым теорема 5.2 доказана.

**Теорема 5.3.** *Собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (5.7), отвечающие различным собственным значениям, удовлетворяют соотношению*

$$\int_a^b u_i(x) u_j(x) \rho(x) dx = 0 \quad (\lambda_i \neq \lambda_j) \quad (5.14)$$

(т. е., как принято говорить,  $u_i$  и  $u_j$  ортогональны с весом  $\rho$ ).



Функции  $u_i(x)$  могут быть нормированы с весом  $\rho(x)$ , т. е. для них будет выполнено

$$\int_a^b u_i^2(x) \rho(x) dx = 1. \quad (5.15)$$

Действительно, собственные функции  $u_i(x)$  интегрального уравнения (5.12), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой (теорема 3.1). Они могут быть нормированы на единицу. Отсюда, учитывая первое соотношение (5.11), получаем (5.14) и (5.15).

**Теорема 5.4.** Каждое собственное значение задачи Штурма—Лиувилля (5.7) имеет ранг, равный единице.

Допустим, что ранг собственного значения  $\lambda$  больше единицы. Тогда существуют по крайней мере две линейно независимые собственные функции  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$ . Из теории линейных дифференциальных уравнений [25] следует, что любое решение уравнения (5.7а) является линейной комбинацией  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$ , поскольку они образуют фундаментальную систему решений. Получается, что любое решение уравнения (5.7а) удовлетворяет (как и  $u_1$ ,  $u_2$ ) условию  $u(a) = 0$ . Это абсурдно, так как заведомо существует решение (5.7а), удовлетворяющее, например, условиям  $u(a) = 1$ ,  $u'(a) = 1$ . Теорема доказана.

**Теорема 5.5.** Для любого  $\lambda_n$  справедливо неравенство

$$\lambda_n > \inf_{[a, b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0.$$

Доказательство. Так как  $L[u_n] + \lambda_n \rho(x) u_n = 0$ , то

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u_n \{L[u_n] + \lambda_n \rho u_n\} dx = \int_a^b u_n (p u_n')' dx - \\ &- \int_a^b q u_n^2 dx + \lambda_n \int_a^b \rho u_n^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (5.15) и применяя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \int_a^b q u_n^2 dx - [u_n(x) p(x) u_n'(x)] \Big|_a^b + \int_a^b p (u_n')^2 dx > \\ &> \int_a^b \frac{q(x)}{\rho(x)} \rho(x) u_n^2(x) dx, \end{aligned}$$

так как  $\left[ \right]_a^b = 0$ , а интеграл, содержащий  $u'_n$ , положителен. Отсюда согласно теореме о среднем

$$\lambda_n > \frac{q(x^*)}{p(x^*)} \int_a^b \rho(x) u_n^2(x) dx = \frac{q(x^*)}{p(x^*)} \geq \inf_{[a, b]} \frac{q(x)}{p(x)} \geq 0,$$

и теорема 5.5 доказана.

**Теорема 5.6** (теорема Стеклова). Пусть  $f(x)$  — дважды непрерывно дифференцируема, причем  $f(a) = f(b) = 0$ . Тогда  $f(x)$  разлагается в абсолютно и равномерно на  $[a, b]$  сходящийся ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (5.7):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x), \quad (5.16)$$

$$\text{где } f_n = \int_a^b f(x) \rho(x) u_n(x) dx.$$

**Доказательство.** Так как  $f(x)$  — дважды непрерывно дифференцируема, то  $L[f] = -h(x)$ , где  $h(x)$  — непрерывная функция. Кроме того,  $f(a) = f(b) = 0$ . Тогда

$$f(x) = - \int_a^b G(x, s) h(s) ds.$$

Отсюда следует равенство  $\sqrt{\rho(x)} f(x) = - \int_a^b \sqrt{\rho(x)} G(x, s) \sqrt{\rho(s)} \times$

$$\times \frac{h(s)}{\sqrt{\rho(s)}} ds = \int_a^b K(x, s) \frac{h(s)}{\sqrt{\rho(s)}} ds, \text{ означающее, что } F(x) =$$

$= f(x) \sqrt{\rho(x)}$  представима через ядро (см. § 10). Следовательно,

по теореме 4.1 Гильберта — Шмидта  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x)$ ,

где  $y_n(x)$  — собственные функции ядра  $K(x, s)$ ,  $F_n = \int_a^b F(x) \times$

$\times y_n(x) dx$ , причем ряд сходится абсолютно и равномерно.

Отсюда  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{y_n(x)}{\sqrt{\rho(x)}} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(x)$  (см. 5.11), где  $F_n =$

$$= \int_a^b f(x) \sqrt{\rho(x)} y_n(x) dx = \int_a^b f(x) \rho(x) u_n(x) dx. \text{ Мы получили с точ-}$$

ностью до обозначений ( $F_n$  вместо  $f_n$ ) представление (5.16), причем доказали абсолютную и равномерную сходимость этого ряда. Теорема доказана.

Вернемся теперь к задаче (5.1)—(5.3) о колебаниях струны и, пользуясь доказанными теоремами, доведем до конца ее решение.

Рассмотрим задачу (5.5). Здесь  $\lambda_n$ , собственные значения, существуют и образуют последовательность

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

Им отвечают собственные функции  $X_1(x), \dots, X_n(x), \dots$ . Так как  $\lambda_n > 0$ , то каждому  $\lambda_n$  отвечает решение  $T_n(t)$  уравнения  $T_n'' + k\lambda_n T_n = 0$  вида  $T_n(t) = C_n \cos \sqrt{k\lambda_n} t + D_n \sin \sqrt{k\lambda_n} t$ .

Решение задачи (5.1)—(5.3) по аналогии с (5.6) ищем в форме

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (C_n \cos \sqrt{k\lambda_n} t + D_n \sin \sqrt{k\lambda_n} t).$$

Из начальных условий (5.3) имеем

$$u^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x),$$

$$v^0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k\lambda_n} X_n(x).$$

Функции  $u^0(x)$  и  $v^0(x)$  удовлетворяют условиям теоремы Стеклова. Поэтому написанные равенства представляют собой разложения типа (5.16) и, следовательно,

$$C_n = \int_0^l u^0(x) \rho(x) X_n(x) dx,$$

$$\sqrt{k\lambda_n} D_n = \int_0^l v^0(x) \rho(x) X_n(x) dx.$$

Тем самым решение  $u(x, t)$  задачи (5.1)—(5.3) построено.

**З а м е ч а н и е.** Мы рассмотрели случай граничных условий (5.76). Все доказанные теоремы остаются справедливыми и для так называемых граничных условий второго рода

$$u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0. \quad (5.17)$$

Единственное различие имеет место в отношении теоремы 5.5 при  $q(x) \equiv 0$ . Для краевой задачи (5.76) неравенство, утверждаемое теоремой 5.5, в случае  $q(x) \equiv 0$  имеет вид  $\lambda_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , так как  $\inf \frac{q(x)}{p(x)} = 0$ . Но для краевых

условий (5.17) наименьшее собственное значение  $\lambda_1$  равно нулю и ему отвечает собственная функция  $u_1 = \text{const}$ , в чем можно убедиться непосредственно. Неравенство  $\lambda_n > 0$  имеет место начиная с  $n = 2$ .

НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА  
ВТОРОГО РОДА

## § 16.

## СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО ЯДРА

Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x), \quad (6.1)$$

в котором  $f(x)$  является вещественной, непрерывной на  $[a, b]$  функцией, ядро  $K(x, s)$  удовлетворяет условию (3.2), а  $\lambda$  — заданное число. Исследуем вопрос существования решения уравнения (6.1).

Допустим, что решение существует. Положим  $g(x) = y(x) - f(x)$ . Обозначая, как и раньше, оператор Фредгольма с ядром  $K(x, s)$  через  $A$ , имеем из (6.1):

$$g = \lambda Ay. \quad (6.2)$$

Отсюда видно, что  $g(x)$  представима через ядро  $K(x, s)$ . Следовательно, по теореме Гильберта—Шмидта функция

$g(x)$  может быть разложена в ряд  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n y_n(x)$ , где

$y_n(x)$  — собственные функции ядра  $K(x, s)$ , а  $g_n = (g, y_n)$  — коэффициенты Фурье (если ядро имеет конечное число собственных функций, то  $g(x)$  представляется соответственно конечной суммой ряда).

Из (6.2) и (4.4) следует, что  $g_n = \frac{(y, y_n)}{\lambda_n} = \lambda \frac{(f+g, y_n)}{\lambda_n} =$   
 $= \lambda \frac{f_n + g_n}{\lambda_n}$ , где  $f_n = (f, y_n)$ . Таким образом, если решение

$y(x)$  существует, то  $y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n y_n(x)$ , где  $g_n$  определяется соотношением

$$g_n = \frac{g_n + f_n}{\lambda_n} \lambda. \quad (6.3)$$

Возможны два случая:

1.  $\lambda \neq \lambda_m$ , т. е. параметр  $\lambda$  не совпадает ни с одним собственным значением ядра  $K(x, s)$ . В этом случае из (6.3) получаем  $g_m = \frac{\lambda f_m}{\lambda_m - \lambda}$  и

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m - \lambda}. \quad (6.4)$$

Убедимся, что в случае, когда ядро  $K(x, s)$  не вырождено и, следовательно, собственных функций бесконечно много, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m - \lambda} \quad (6.5)$$

сходится равномерно. Действительно, в этом случае согласно теореме 3.1 имеем  $\lim_{m \rightarrow \infty} |\lambda_m| = \infty$ . Следовательно, при достаточно больших  $m$  справедливо

$$\frac{1}{|\lambda_m - \lambda|} \leq \frac{2}{|\lambda_m|}. \quad (6.6)$$

В силу теоремы Гильберта—Шмидта

$$2 \int_a^b K(x, s) f(s) ds = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m} \cdot 2,$$

причем ряд сходится равномерно и абсолютно. При достаточно больших  $m$  в силу (6.6) члены функционального ряда  $2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|f_m| |y_m(x)|}{|\lambda_m|}$  являются мажорирующими для членов ряда (6.5). Следовательно, ряд (6.5) сходится абсолютно и равномерно.

Мы получили решение в виде (6.4), предположив, что оно существует. Поэтому нужно проверить, что выражение (6.4) действительно является решением, т. е. удовлетворяет (6.1). Для этого подставим (6.4) в уравнение (6.1). В силу равномерной сходимости ряда (6.5) его можно интегрировать почленно. Получим

$$\begin{aligned}
\lambda Ay &= \lambda A \left( f + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m - \lambda} \right) = \lambda Af + \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m A y_m}{\lambda_m - \lambda} = \\
&= \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m} + \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{(\lambda_m - \lambda) \lambda_m} = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_m} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{(\lambda_m - \lambda) \lambda_m} \right) f_m y_m = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m - \lambda} = y - f, \quad (6.7)
\end{aligned}$$

что и требовалось проверить. Таким образом доказано, что решение уравнения (6.1) существует и определяется выражением (6.4).

Убедимся, что решение единственно. Действительно, пусть имеются два решения уравнения (6.1) и  $\bar{y}(x)$  — их разность. Тогда  $\bar{y}(x)$  удовлетворяет однородному уравнению  $\bar{y} = \lambda A \bar{y}$ . По предположению  $\lambda$  не совпадает ни с одним собственным значением ядра  $K(x, s)$ , а тогда однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. Отсюда  $\bar{y}(x) \equiv 0$ , а значит, решение (6.1) единственно.

Представим  $y(x)$ , пользуясь (6.7), в виде

$$\begin{aligned}
y(x) &= f + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m} + \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m (\lambda_m - \lambda)} = f + \\
&+ \int_a^b K(x, s) f(s) ds + \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(f, y_m)}{\lambda_m (\lambda_m - \lambda)}.
\end{aligned}$$

Подставляя сюда  $(f, y_m) = \int_a^b f(s) y_m(s) ds$  и переставляя суммирование и интегрирование, получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left\{ K(x, s) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x) y_m(s)}{\lambda_m (\lambda_m - \lambda)} \right\} f(s) ds.$$

Перестановка суммирования и интегрирования допустима в силу равномерной сходимости ряда  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x) y_m(s)}{\lambda_m (\lambda_m - \lambda)}$ , следующей из абсолютной и равномерной сходимости ряда  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x) y_m(s)}{\lambda_m^2} = K_2(x, s)$ , доказанной выше (теорема 3.4), и (6.6).

В результате получаем, что решение уравнения (6.1) дается выражением

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds, \quad (6.8)$$

где

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x) y_m(s)}{\lambda_m (\lambda_m - \lambda)}. \quad (6.9)$$

Если решение интегрального уравнения представимо формулой типа (6.8), то в этой формуле  $R(x, s, \lambda)$  называется *резольвентой* ядра  $K(x, s)$ . В рассматриваемом случае резольвента выражается рядом (6.9).

2. Рассмотрим случай  $\lambda = \lambda_n$ , т. е. параметр  $\lambda$  в уравнении (6.1) равен некоторому собственному значению ядра  $K(x, s)$ . Пусть  $y_{n_1}, \dots, y_{n_p}$  — собственные функции ядра, соответствующие  $\lambda_n$  (ранг  $\lambda_n$  равен  $p$ ).

Допустим, что решение уравнения (6.1) существует. Тогда приходим к соотношению (6.3) так же, как в случае 1.

Если хотя бы один из коэффициентов  $f_{n_i} \neq 0$  ( $i=1, \dots, p$ ), то (6.3) при  $m = n_i$  противоречиво, следовательно, предположение о существовании решения с исходного уравнения (6.1) ошибочно.

Пусть все  $f_{n_i} = (f, y_{n_i}) = 0$  для  $i=1, \dots, p$ . Тогда из (6.3) получаем, что значения коэффициентов  $g_{n_i}$  не определены, а остальные  $g_m$  определяются однозначно. Следовательно, если решение существует, то оно имеет вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^p C_i y_{n_i} + \lambda \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_1, \dots, n_p}}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m - \lambda}, \quad (6.10)$$

где  $C_i$  — некоторые константы.

Аналогично тому, как это было сделано в случае 1, можно проверить, что сумма

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_1, \dots, n_p}}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m - \lambda}$$

двух слагаемых правой части (6.10) удовлетворяет неоднородному уравнению (6.1). Так как при любых  $C_i$  сумма

$\sum_{i=1}^p C_i y_{n_i}$  удовлетворяет однородному уравнению (6.1), то все выражение (6.10) удовлетворяет неоднородному уравнению (6.1).



Нетрудно убедиться, что любое решение уравнения (6.1) представимо в форме (6.10). Действительно, пусть  $y(x)$  — произвольное решение уравнения (6.1). Тогда разность  $y(x) - \tilde{y}(x)$  удовлетворяет однородному уравнению (6.1), а любое решение однородного уравнения является собственной функцией ядра  $K(x, s)$ , отвечающей данному значению  $\lambda$ , и следовательно, является линейной комбинацией  $y_{n_1}, \dots, y_{n_p}$ .

Отсюда следует, что  $y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{i=1}^p C_i y_{n_i}$ .

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы:

**Теорема 6.1.** Пусть ядро  $K(x, s)$  удовлетворяет требованиям (3.2). Тогда если  $\lambda$  не совпадает ни с одним собственным значением ядра  $K(x, s)$ , то решение интегрального уравнения существует, единственно и представимо в виде (6.4) или (6.8).

Если  $\lambda = \lambda_n$ , где  $\lambda_n$  — некоторое собственное значение ядра  $K(x, s)$  и функция  $\tilde{f}(x)$  ортогональна всем собственным функциям, соответствующим  $\lambda_n$ , то решение уравнения (6.1) существует, не является единственным и представимо в виде (6.10).

Если же  $\lambda = \lambda_n$  и  $\tilde{f}(x)$  не ортогональна хотя бы одной собственной функции  $y_{n_i}(x)$ , то решения не существует.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)y(s)ds + \sin x - \cos x. \quad (6.11)$$

Исследуем решение при различных  $\lambda$ . Из (6.11) следует, что

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda \int_0^{\pi} (\sin x \cos s + \cos x \sin s)y(s)ds + \sin x - \cos x = \\ &= \sin x \left[ \lambda \int_0^{\pi} \cos sy(s)ds + 1 \right] + \cos x \left[ \lambda \int_0^{\pi} \sin sy(s)ds - 1 \right] = \\ &= A \sin x + B \cos x, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые коэффициенты. Подставляя (6.12) в (6.11), имеем

$$\begin{aligned} A \sin x + B \cos x &= \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)[A \sin s + B \cos s]ds + \\ &+ \sin x - \cos x = \sin x \left[ \lambda \int_0^{\pi} \cos s(A \sin s + B \cos s)ds + 1 \right] + \\ &+ \cos x \left[ \lambda \int_0^{\pi} \sin s(A \sin s + B \cos s)ds - 1 \right] = \sin x \times \\ &\times \left( \lambda \frac{\pi}{2} B + 1 \right) + \cos x \left( \lambda \frac{\pi}{2} A - 1 \right). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при  $\sin x$  и  $\cos x$ , получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A - B\lambda \frac{\pi}{2} = 1, \\ B - A\lambda \frac{\pi}{2} = -1. \end{cases} \quad (6.13)$$

Обратимся к однородному уравнению (6.11). Ему соответствует однородная система (6.13). Приравнявая в этом случае определитель системы уравнений (6.13) нулю, т. е.

полагая  $\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \frac{\pi}{2} \\ -\lambda \frac{\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$ , находим собственные значения

$\lambda_{1,2} = \pm \frac{2}{\pi}$ . Им соответствуют решение  $A = \pm B$  однородной системы (6.13) и следующие собственные функции однородного уравнения (6.11):  $y_{1,2}(x) = \frac{\sin x \pm \cos x}{\sqrt{\pi}}$ . Множитель

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  выбран из условия нормировки собственных функций

на единицу:  $\int_0^{\pi} (y_{1,2})^2 dx = 1$ .

Вернемся к неоднородному уравнению (6.11).

1. При  $\lambda \neq \pm 2/\pi$  из (6.13) находим  $A = (1 + \lambda\pi/2)^{-1}$ ,  $B = -A$  и решение  $y(x) = \frac{\sin x - \cos x}{1 + \lambda\pi/2}$ . Таким образом проиллюстри-

ровано первое утверждение теоремы 6.1: при  $\lambda \neq \pm 2/\pi$  решение уравнения (6.11) существует и единственно.

2. Пусть  $\lambda = 2/\pi$ . Тогда из (6.13) получаем  $B = A - 1$ . При этом  $y(x) = A \sin x + (A - 1) \cos x$ , где  $A$  — произвольная константа. Таким образом, решение уравнения (6.11) существует, но не единственно. Собственному значению  $\lambda_1 = 2/\pi$  ядра  $K(x, s) = \sin(x + s)$  соответствует собственная функция  $y_1(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}$ . Нетрудно проверить, что выполнено ус-

ловие  $\int_0^{\pi} f(x)y_1(x)dx = \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x) \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}} dx = 0$ . Этим

иллюстрируется второе утверждение теоремы 6.1.

3. Пусть  $\lambda = -2/\pi$ . Тогда система уравнений (6.13) несовместна. Решения у интегрального уравнения (6.11) нет. Собственному значению  $\lambda_2 = -2/\pi$  соответствует собственная

Функция  $y_2(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}$ . Легко видеть, что в рассматриваемом случае не выполнено необходимое условие существования решения уравнения (6.11), поскольку

$$\int_0^{\pi} f(x)y_2(x) dx = \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x) \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}} dx = 2\sqrt{\pi} \neq 0.$$

Этим иллюстрируется третье утверждение теоремы 6.1.

**Пример 2.** Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1 + xs) y(s) ds + ax^2 + bx + d.$$

Исследуем его решение при различных значениях параметров  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ .

Сначала найдем собственные функции соответствующего однородного уравнения. Ищем решение однородного уравнения в виде  $y = Fx + D$ . Подставляя  $y$  в такой форме в однородное уравнение, имеем

$$Fx + D = \lambda \int_{-1}^1 (1 + xs)(Fs + D) ds = \frac{2}{3} \lambda Fx + 2\lambda D.$$

Отсюда  $\lambda_1 = 1/2$ ,  $y_1(x) = D$ ;  $\lambda_2 = 3/2$ ,  $y_2(x) = Fx$ .

Вернемся к неоднородному уравнению. При  $\lambda \neq 1/2$  и  $\lambda \neq 3/2$  ищем его решение в виде  $y = ax^2 + C_1x + C_2$ . Подставляя  $y$  в такой форме в уравнение и приравнивая члены с одинаковыми степенями  $x$ , находим значения  $C_1$  и  $C_2$ . Получаем

$$y(x) = ax^2 + \frac{3b}{3-2\lambda} x + \frac{3d+2\lambda a}{3(1-2\lambda)}.$$

При  $\lambda = 1/2$  согласно теореме 6.1 решение существует лишь при условии

$$\int_{-1}^1 f(x)y_1(x) dx = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + d) D dx = 0,$$

т. е. при  $a + 3d = 0$ . В этом случае  $y(x) = ax^2 + \frac{3}{2} bx + C$ , где

$C$  — произвольная константа.

При  $\lambda = 3/2$  решение существует лишь при условии

$$\int_{-1}^1 (ax^2 + bx + d) Fx dx = 0,$$

т. е. при  $b = 0$ . В этом случае  $y(x) = ax^2 + Cx - \frac{a+d}{2}$ .

# § 17.

## СЛУЧАЙ «МАЛОГО» $\lambda$

Пусть  $K(x, s)$  и  $f(x)$  — произвольные непрерывные при  $x, s \in [a, b]$  функции. Симметрии  $K(x, s)$  не требуем. Обозначим  $\sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} |K(x, s)| = \bar{K}$ .

**1. Теорема существования и единственности.** Имеет место следующая

**Теорема 6.2.** Если  $|\lambda| < \frac{1}{\bar{K}(b-a)}$ , то решение уравнения

(6.1) существует и единственно. Решение может быть найдено как предел равномерно сходящейся последовательности приближений  $\varphi_n(x)$ , определяемых рекуррентным соотношением

$$\varphi_{n+1} = \lambda A\varphi_n + \hat{f}, \quad (6.14)$$

где  $\varphi_0(x)$  — произвольная непрерывная функция.

**Доказательство.** Используем принцип сжатых отображений. Рассмотрим полное метрическое пространство  $C[a, b]$  непрерывных на  $[a, b]$  функций, где  $\rho(\varphi_m, \varphi_k) = \sup_{[a, b]} |\varphi_m(x) - \varphi_k(x)|$  (см. [25]).

Рассмотрим оператор

$$z = L\varphi = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x). \quad (6.15)$$

Если  $\varphi(x)$  непрерывна, то и  $z(x)$  непрерывная функция. Следовательно, оператор  $L$  отображает элементы пространства  $C[a, b]$  снова в элементы  $C[a, b]$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} |L\varphi_m - L\varphi_k| &= \left| \lambda \int_a^b K(x, s) (\varphi_m(s) - \varphi_k(s)) ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \bar{K} (b-a) \sup_{[a, b]} |\varphi_m(x) - \varphi_k(x)|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\rho(L\varphi_m, L\varphi_k) = \sup_{[a, b]} |L\varphi_m - L\varphi_k| \leq \alpha \rho(\varphi_m, \varphi_k),$$

где  $\alpha = |\lambda| \bar{K} (b-a)$ . Из условий теоремы следует, что  $\alpha < 1$  и тем самым оператор  $L$  сжимающий.

Таким образом выполнены все условия, при которых имеет место принцип сжатых отображений. Согласно этому принципу оператор  $L$  имеет единственную неподвижную точку, которая может быть найдена как предел сходящейся по метрике пространства  $C[a, b]$  последовательности приближений, определяемых соотношением (6.14). Непод-

вижная точка оператора  $L$ , как видно из (6.15), совпадает с решением интегрального уравнения (6.1). Следовательно, решение (6.1) существует и единственно. Наконец, последовательность приближений (6.14) сходится равномерно относительно  $x \in [a, b]$ , поскольку сходимость в метрике пространства  $C[a, b]$  означает равномерную сходимость.

**Замечание.** Если ядро  $K$  имеет собственные значения, то  $|\lambda_h| \geq \frac{1}{K(b-a)}$ . Действительно, допустим противное. Тогда

при некотором  $\lambda_h$  таком, что  $|\lambda_h| < \frac{1}{K(b-a)}$ , существует не-

тривиальное решение уравнения  $y = \lambda_h A y$ . С другой стороны,  $y(x) \equiv 0$  очевидно также удовлетворяет этому уравнению. Тем самым приходим к противоречию с доказанной в теореме 6.2 единственностью решения. Противоречие доказывает справедливость неравенства  $|\lambda_h| \geq \frac{1}{K(b-a)}$ .

**2. Резольвента.** Построим выражение для резольвенты ядра  $K(x, s)$  в рассматриваемом случае. Положим  $\varphi_0 = f$ . Тогда из (6.14) имеем

$$\varphi_1 = \lambda A f + f,$$

$$\varphi_2 = \lambda A(\lambda A f + f) + f = \lambda^2 A^2 f + \lambda A f + f,$$

...

$$\varphi_n = \sum_{m=1}^n \lambda^m A^m f + f. \quad (6.16)$$

Согласно (4.9) справедливо представление  $A^m f = \int_a^b K_m(x, s) \times \times f(s) ds$ , где  $K_m(x, s)$  — повторное ядро порядка  $m$  (считаем  $K_1(x, s) \equiv K(x, s)$ ).

Имеем последовательность оценок

$$\begin{aligned} \sup |K_m(x, s)| &= \sup \left| \int_a^b K(x, t) K_{m-1}(t, s) dt \right| \leq \\ &\leq \bar{K}(b-a) \sup |K_{m-1}(x, s)| \leq \dots \leq \bar{K}^m(b-a)^{m-1}. \end{aligned}$$

Отсюда ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$  равномерно сходится при  $|\lambda| < \frac{1}{\bar{K}(b-a)}$ . Это позволяет перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в

(6.16) и поменять местами операции суммирования и интегрирования. Получим

$$\begin{aligned} y(x) &= f + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m A^m f = f + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds \\ &= f + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds, \end{aligned} \quad (6.17)$$

где

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) \quad (6.18)$$

— резольвента ядра  $K(x, s)$ .

Соотношения (6.9) и (6.18) определяют резольвенту соответственно в случае симметричного ядра и в случае произвольного ядра и „малого“  $\lambda$ . Проверим, что в случае, когда ядро симметрично, а  $|\lambda| < \frac{1}{K(b-a)}$ , выражения (6.9) и (6.18) эквивалентны.

Действительно, в этом случае согласно (4.13) для  $m \geq 2$  справедливо представление  $K_m(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i^m}$ , где  $y_i(x)$  — собственные функции ядра  $K(x, s)$ . Подставим  $K_m(x, s)$  в этом виде в (6.18). Учитывая, что  $|\lambda| < \frac{1}{K(b-a)} \leq |\lambda_i|$ , имеем

$$\begin{aligned} R(x, s, \lambda) &= K(x, s) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i^m} = K(x, s) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x)y_i(s) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{\lambda_i^m} = K(x, s) + \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x)y_i(s) \times \\ &\times \frac{\lambda/\lambda_i^2}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}} = K(x, s) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}, \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (6.9) для резольвенты, что и требовалось. Абсолютная и равномерная сходимость полученного ряда оправдывает проделанную перестановку порядка суммирования по  $i$  и  $m$  [30].

Итак, доказана следующая

**Теорема 6.3.** При  $|\lambda| < \frac{1}{K(b-a)}$  решение уравнения (6.1)

дается формулой (6.17), в которой резольвента  $R(x, s, \lambda)$  определяется как сумма равномерно и абсолютно сходящегося ряда (6.18). Если при этом ядро  $K(x, s)$  симметрично, то (6.18) совпадает с (6.9).

**Пример.** Построить резольвенту для уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-s)y(s)ds + f(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} K(x, s) &= \sin(x-s); \quad K_2(x, s) = \int_0^{\pi} \sin(x-t) \sin(t-s)dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(x+s-2t) - \cos(x-s)]dt = -\frac{\pi}{2} \cos(x-s); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3(x, s) &= \int_0^{\pi} \sin(x-t) \left[ -\frac{\pi}{2} \cos(t-s) \right] dt = \\ &= -\frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} [\sin(x-s) + \sin(x+s-2t)]dt = -\frac{\pi}{4} \sin(x-s). \end{aligned}$$

Очевидно,  $K_{2m+1}(x, s) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \sin(x-s)$ , а  $K_{2m}(x, s) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1} \cos(x-s)$  для  $m=1, 2, \dots$ . Получаем  $R(x, s,$

$$\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s) = \sin(x-s) \left[ 1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4 - \dots \right] -$$

$$- \lambda \frac{\pi}{2} \cos(x-s) \left[ 1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4 - \dots \right].$$

При  $|\lambda| \frac{\pi}{2} < 1$  ряды, стоящие в квадратных скобках, сходятся и представляют собой геометрические прогрессии. Отсюда при  $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$  получим

$$R(x, s, \lambda) = \frac{\sin(x-s) - \frac{\lambda\pi}{2} \cos(x-s)}{1 + \left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

В данном примере ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s)$  сходится при  $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$ , в то время как в теореме 6.3 указана оценка  $|\lambda| < \frac{1}{\bar{K}(b-a)} = \frac{1}{\pi}$ . Это говорит о том, что оценка  $|\lambda| < \frac{1}{\bar{K}(b-a)}$  является достаточной, но не является необходимой для сходимости ряда (6.18).

**3. Обобщение результатов на случай полярных ядер.** Напомним, что полярным ядром называется ядро вида

$$K(x, s) = \frac{\Phi(x, s)}{|x-s|^\alpha},$$

где  $0 < \alpha < 1$ , а  $\Phi(x, s)$  — непрерывная функция. Рассмотрим оператор Фредгольма с полярным ядром

$$z(x) = Ay = \int_a^b \frac{\Phi(x, s)}{|x-s|^\alpha} y(s) ds.$$

Он отображает ограниченные функции  $y(x)$  в непрерывные функции  $z(x)$ . Действительно, обозначим  $\sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} |\Phi(x, s)| = H$ ,

а  $\sup_{a \leq x \leq b} |y(x)| = y_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |z(x_1) - z(x_2)| &\leq \int_a^b |\Phi(x_1, s) - \Phi(x_2, s)| \frac{|y(s)|}{|x_2 - s|^\alpha} ds + \\ &+ \int_a^b |\Phi(x_1, s)| \left| \frac{1}{|x_1 - s|^\alpha} - \frac{1}{|x_2 - s|^\alpha} \right| |y(s)| ds \leq \sup_{a \leq s \leq b} |\Phi(x_1, s) - \\ &- \Phi(x_2, s)| \frac{2y_0(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{Hy_0}{1-\alpha} \left[ (x_1-a)^{1-\alpha} - (x_2-a)^{1-\alpha} + \right. \\ &\left. + (b-x_2)^{1-\alpha} - (b-x_1)^{1-\alpha} + 4 \left( \frac{x_2-x_1}{2} \right)^{1-\alpha} \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$ . Отсюда следует непрерывность функции  $z(x)$ .

Обозначим  $\sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, s)| ds = P$ . Тогда

$$|Ay_1 - Ay_2| \leq |y_1 - y_2| \int_a^b |K(x, s)| ds \leq P|y_1 - y_2|.$$



Следовательно, оператор  $z = \lambda Ay + f$  сжимающий, если  $|\lambda| < \frac{1}{P}$ . Отсюда видно, что теорема 6.2 остается в силе и для полярных ядер, если условие  $|\lambda| < \frac{1}{\bar{K}(b-a)}$  заменить условием  $|\lambda| < \frac{1}{P}$ .

Обратимся к выражению для резольвенты (6.18) в случае полярного ядра  $K(x, s)$ . Убедимся в том, что повторные ядра  $K_n(x, s)$  могут иметь особенность лишь до некоторого конечного номера  $n$ , а ядра более высокого порядка — непрерывные функции.

Действуем по индукции. Пусть  $n$ -е повторное ядро имеет вид  $K_n(x, s) = \frac{\Phi_n(x, s)}{|x-s|^\beta}$ , где  $0 < \beta < 1$ ,  $|\Phi_n(x, s)| < H_n$  (для  $n=1$  условия выполнены). Тогда

$$K_{n+1}(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_n(t, s) dt = \int_a^b \frac{\Phi(x, t) \Phi_n(t, s)}{|x-t|^\alpha |t-s|^\beta} dt. \quad (6.19)$$

$$\text{Если } \alpha + \beta < 1, \text{ то } K_{n+1}(x, s) \leq HH_n \int_a^b \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-s|^\beta}. \quad \text{Этот}$$

интеграл, а следовательно, и  $K_{n+1}(x, s)$  — ограниченная величина при любых  $x$  и  $s$ .

Если  $\alpha + \beta \geq 1$ , то делаем замену переменной  $t = s + \xi(x-s)$ .

Обозначаем  $a_1 = \frac{a-s}{x-s}$ ,  $b_1 = \frac{b-s}{x-s}$ . Тогда из (6.19) получаем  $K_{n+1}(x, s) = |x-s|^{1-\alpha-\beta} F(x, s)$ , где

$$F(x, s) = \frac{x-s}{|x-s|} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\Phi(x, s+\xi(x-s)) \Phi_n(s+\xi(x-s), s)}{|1-\xi|^\alpha |\xi|^\beta} d\xi.$$

При  $\alpha + \beta > 1$  очевидно  $|F(x, s)| < HH_n I$ , где  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{|1-\xi|^\alpha |\xi|^\beta}$  —

сходящийся интеграл. При  $\alpha + \beta = 1$  выполнено  $|F(x, s)| \leq \int_{a_1}^{b_1} \frac{HH_n d\xi}{|1-\xi|^\alpha |\xi|^\beta} = g(x, s) \ln|x-s|$ , где  $g(x, s)$  — ограниченная

функция. Поскольку  $\ln z = o\left(z^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)$  при  $z \rightarrow 0$ , то  $|F(x, s)| \leq$

$$\leq C|x-s|^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Итак, ядро  $K_n(x, s)$  имело особенность  $O(|x-s|^{-\beta})$ . Ядро  $K_{n+1}(x, s)$  при  $\alpha+\beta < 1$  ограничено, а при  $\alpha+\beta \geq 1$  имеет особенность более низкого порядка, чем  $K_n(x, s)$ , а именно в последнем случае  $K_{n+1}(x, s)$  представимо в виде  $K_{n+1}(x, s) = \frac{\Phi_{n+1}(x, s)}{|x-s|^{\beta - \frac{1-\alpha}{2}}}$ , где  $\Phi_{n+1}(x, s)$  — ограниченная функция. По-

скольку при повышении индекса повторного ядра на единицу порядок особенности убывает не менее чем на  $\frac{1-\alpha}{2}$ , то повторные ядра  $K_n(x, s)$ , по крайней мере с индексами  $n > n_0$ , где  $n_0$  — целая часть числа  $\left(\frac{2\alpha}{\alpha-1} + 1\right)$ , — ограниченные функции.

При  $n > n_0$  ядра  $K_{n+1}(x, s)$  являются непрерывными функциями. Действительно, выше было показано, что оператор Фредгольма с полярным ядром переводит ограниченные функции в непрерывные. Поскольку  $K_n$  ограничены, то  $K_{n+1} = AK_n$  непрерывны при  $n > n_0$ .

Ряд (6.18) можно разбить на две части. В одну войдет конечное число слагаемых, которые могут иметь особенность, в другую — бесконечная сумма ограниченных и непрерывных повторных ядер:  $R(x, s, \lambda) = R_1(x, s, \lambda) + R_2(x, s, \lambda)$ , где

$$R_1(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda^{n-1} K_n(x, s), \quad R_2(x, s, \lambda) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s).$$

Ограниченные повторные ядра при  $|\lambda| < 1/P$  связаны соотношением

$$\sup_{x, s \in [a, b]} |\lambda K_{n+1}(x, s)| = \sup_{x, s \in [a, b]} \left| \lambda \int_a^b K(x, t) K_n(t, s) dt \right| \leq \leq |\lambda|^P \sup_{x, s \in [a, b]} |K_n(x, s)| < \sup_{x, s \in [a, b]} |K_n(x, s)|,$$

из которого следует равномерная сходимость ряда  $R_2$ . Отсюда видно, что формулы (6.17), (6.18) остаются в силе и для полярных ядер при условии  $|\lambda| < 1/P$ .

**4. Ослабление требований на  $\lambda$ .** В примере, рассмотренном в п. 2, была построена резольвента в виде ряда, который оказался сходящимся при  $|\lambda| < 2/\pi$ , в то время как теорема 6.3 гарантирует сходимость при  $|\lambda| < 1/\pi$ . Это наводит на мысль о том, что требования на  $\lambda$  являются в теоремах 6.2 и 6.3 чересчур ограничительными.

В настоящем пункте мы докажем теорему 6.2 при более слабых ограничениях на  $\lambda$ .

Пусть  $K(x, s)$  и  $f(x)$  по-прежнему непрерывные функции

Обозначим  $B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds}$ . Заметим, что  $\frac{1}{B} \geq \frac{1}{\bar{K}(b-a)}$ . Имеет место следующая

**Теорема 6.4.** Утверждение теоремы 6.2 остается в силе при  $|\lambda| < 1/B$ .

**Доказательство.** Выберем произвольную непрерывную функцию  $\varphi_0(x)$ . Обозначим  $\|\varphi_0\| = C_0$ , где норма берется в пространстве  $h[a, b]$  (см. § 4), т. е. под  $\|\cdot\|$  понимается величина

$$\|y\|^2 = (y, y) = \int_a^b y^2(x) dx.$$

Обозначим  $C = \max \left[ \frac{\|f\|}{1-|\lambda|B}, C_0 \right]$ . Рассмотрим последовательность, задаваемую рекуррентным соотношением (6.14):  $\varphi_{n+1} = \lambda A\varphi_n + f$ .

Пусть  $\varphi_n(x)$  — непрерывная функция и  $\|\varphi_n\| \leq C$ . Это имеет место при  $n=0$ . Тогда  $\varphi_{n+1}(x)$  обладает теми же свойствами. Действительно. Непрерывность  $\varphi_{n+1}(x)$  очевидна. Для доказательства того, что  $\|\varphi_{n+1}\| \leq C$ , предварительно оценим  $\|\varphi_{n+1} - f\|$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+1} - f\|^2 &= \|\lambda A\varphi_n\|^2 = \lambda^2 \int_a^b \left( \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds \right)^2 dx \leq \\ &\leq \lambda^2 \int_a^b \left( \int_a^b K^2(x, s) ds \int_a^b \varphi_n^2(s) ds \right) dx = \\ &= \lambda^2 \int_a^b \varphi_n^2(s) ds \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds \leq \lambda^2 B^2 C^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $\|\varphi_{n+1}\| \leq \|\varphi_{n+1} - f\| + \|f\| \leq |\lambda|BC + \|f\| \leq C$ . Последнее неравенство выполнено в силу того, что  $C \geq \frac{\|f\|}{1-|\lambda|B}$ . Итак,  $\varphi_n(x)$  образуют последовательность непрерыв-

ных, ограниченных (равномерно относительно  $n$ ) по норме функций.

Из доказательства теоремы 2.6 следует, что оператор  $A$  переводит ограниченную по норме последовательность функции  $\varphi_n(x)$  в последовательность равномерно ограниченных и равностепенно-непрерывных на  $[a, b]$  функций  $z_n(x) = A\varphi_n$ .

Так как  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$ , то она ограничена на нем и равномерно-непрерывна. Поэтому последовательность  $\varphi_{n+1} = \lambda A\varphi_n + f = \lambda z_n + f$  также будет равномерно ограниченной и равностепенно-непрерывной.

Итак, последовательность функций  $\varphi_n(x)$  является равномерно ограниченной и равностепенно-непрерывной. Тогда по теореме Арцела существует подпоследовательность  $\varphi_{n_k}(x)$ , равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции  $\bar{\varphi}(x)$ . Докажем, что вся последовательность  $\varphi_n$  равномерно сходится к  $\bar{\varphi}$ . Допустим, что это не так. Тогда существует  $\delta > 0$ , подпоследовательность  $\varphi_{n_p}$  и такие  $x_{n_p} \in [a, b]$ , что  $|\varphi_{n_p}(x_{n_p}) - \bar{\varphi}(x_{n_p})| > \delta$ . Из последовательности  $\varphi_{n_p}$  в силу той же теоремы Арцела можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой непрерывной функции  $\bar{\bar{\varphi}}(x)$ . Будем считать  $\varphi_{n_m}$  такой подпоследовательностью. Тогда при достаточно большом  $n_m$  будем иметь  $|\varphi_{n_m}(x) - \bar{\varphi}(x)| < \delta/2$  для всех  $x \in [a, b]$  и, в частности,  $|\varphi_{n_m}(x_{n_m}) - \bar{\varphi}(x_{n_m})| < \delta/2$ . Поэтому  $|\bar{\varphi}(x_{n_m}) - \bar{\bar{\varphi}}(x_{n_m})| \geq |\varphi_{n_m}(x_{n_m}) - \bar{\varphi}(x_{n_m})| - |\varphi_{n_m}(x_{n_m}) - \bar{\bar{\varphi}}(x_{n_m})| \geq \delta - \delta/2 = \delta/2$ . Отсюда можно заключить, что  $\sup_{[a, b]} |\bar{\varphi}(x) - \bar{\bar{\varphi}}(x)| \geq \delta/2$ , т. е.  $\bar{\varphi}(x) \neq \bar{\bar{\varphi}}(x)$ , а следовательно,  $\|\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}\| = \mu > 0$ .

Докажем, что  $\varphi_n(x)$  является фундаментальной последовательностью в смысле сходимости по норме. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\|^2 &= \int_a^b \left( \lambda \int_a^b K(x, s)(\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)) ds \right)^2 dx \leq \\ &\leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) ds dx \cdot \int_a^b (\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s))^2 ds = \lambda^2 B^2 \|\varphi_n - \\ &- \varphi_{n-1}\|^2 \leq (\lambda^2 B^2)^2 \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\|^2 \leq \dots \leq (\lambda^2 B^2)^n \|\varphi_1 - \\ &- \varphi_0\|^2 = (\lambda^2 B^2)^n D^2, \end{aligned}$$

где  $D = \|\varphi_1 - \varphi_0\|$ . Отсюда  $\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq (\lambda B)^n D$ . Далее имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+p} - \varphi_n\| &\leq \|\varphi_{n+p} - \varphi_{n+p-1}\| + \|\varphi_{n+p-1} - \varphi_{n+p-2}\| + \\ &+ \dots + \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq D[(\lambda B)^{n+p-1} + (\lambda B)^{n+p-2} + \\ &+ \dots + (\lambda B)^n] \leq D \frac{(\lambda B)^n}{1 - \lambda B}. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства можно сделать вывод о том, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $N_0$  такое, что  $\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\| < \varepsilon/3$ , если  $n > N_0$ , а  $p$  — любое целое число.

Так как  $\varphi_{n_k}(x) \Rightarrow \bar{\varphi}(x)$ , а  $\varphi_{n_m}(x) \Rightarrow \bar{\bar{\varphi}}(x)$ , то при достаточно больших  $n_k$  и  $n_m$  имеем  $\|\bar{\varphi} - \varphi_{n_k}\| < \varepsilon/3$ ,  $\|\bar{\bar{\varphi}} - \varphi_{n_m}\| < \varepsilon/3$ . Пусть, кроме того,  $n_k > N_0$  и  $n_m > N_0$ . Тогда  $\|\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}\| \leq \|\bar{\varphi} - \varphi_{n_k}\| + \|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_m}\| + \|\varphi_{n_m} - \bar{\bar{\varphi}}\| < \varepsilon$ , что противоречит соотношению  $\|\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}\| = \nu$  при  $\varepsilon < \nu$ .

Полученное противоречие доказывает равномерную сходимость всей последовательности  $\varphi_n(x)$  к непрерывной функции  $\bar{\varphi}(x)$ . Переходя к пределу в (6.14), получаем, что  $\varphi$  является решением уравнения (6.1).

Осталось доказать единственность. Пусть  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$  — два различных непрерывных решения уравнения (6.1). Тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^2 &= \int_a^b \left( \lambda \int_a^b K(x, s)(\varphi(s) - \tilde{\varphi}(s)) ds \right)^2 dx \leq \\ &\leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds \int_a^b (\varphi(s) - \tilde{\varphi}(s))^2 ds \leq \lambda^2 B^2 \|\varphi - \tilde{\varphi}\|. \end{aligned}$$

Поскольку  $\lambda^2 B^2 < 1$ , получаем  $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0$  и, следовательно, теорема доказана.

Вернемся к рассмотренному в п. 2 примеру, в котором

$$B = \sqrt{\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x-s) dx ds} = \frac{\pi}{2}. \text{ Согласно теореме 6.4 сходимости ряда для резольвенты имеет место при } |\lambda| \leq \frac{1}{B} =$$

$= \frac{2}{\pi}$ , что совпадает с результатом, полученным в данном примере непосредственным расчетом.

## § 18.

### ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

Целью этого параграфа является обобщение результатов § 1 на случай произвольного непрерывного ядра.

Интегральные уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x) \quad (6.20)$$

и

$$z(x) = \lambda^* \int_a^b K^*(s, x) z(s) ds + g(x)$$

называются *союзными*, если  $K^*(s, x)$  — эрмитово сопряженное по отношению к  $K(x, s)$  ядро. При этом сами ядра  $K(x, s)$  и  $K^*(s, x)$  также называют союзными.

Если  $K(x, s)$  и  $\lambda$  вещественны, то союзным к уравнению (6.20) является уравнение

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(s, x) z(s) ds + g(x). \quad (6.21)$$

Мы для простоты изложения будем рассматривать случай вещественных функций  $K(x, s)$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$  и вещественного  $\lambda$ . Для комплексных  $K(x, s)$  и  $\lambda$  могут быть проведены рассуждения, аналогичные нижеприведенным, и все результаты настоящего параграфа остаются справедливыми.

**1. Случай вырожденного непрерывного ядра.** Вначале рассмотрим вопрос разрешимости уравнений (6.20) и (6.21) для вырожденного ядра, а затем покажем, что все полученные результаты переносятся также и на невырожденные ядра.

Итак, пусть

$$K(x, s) = \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) \omega_m(s). \quad (6.22)$$

Пусть все функции  $\Omega_m(x)$  линейно независимы между собой (этого всегда можно добиться, выразив зависимые функции через независимые и сократив соответственно число слагаемых, входящих в сумму (6.22)).

Из (6.20), учитывая (6.22), имеем

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda \int_a^b \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) \omega_m(s) y(s) ds + f(x) = \\ &= \lambda \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) C_m + f(x), \end{aligned} \quad (6.23)$$

где

$$C_m = \int_a^b \omega_m(s) y(s) ds. \quad (6.24)$$

Умножая (6.23) на  $\omega_i(x)$  и интегрируя, получим

$$C_i - \lambda \sum_{m=1}^n C_m \alpha_{im} = d_i, \quad (6.25)$$

где

$$\alpha_{im} = \int_a^b \omega_i(x) \Omega_m(x) dx, \quad d_i = \int_a^b f(x) \omega_i(x) dx. \quad (6.26)$$

Интегральное уравнение (6.20) и алгебраическая система (6.26) эквивалентны. Действительно, если  $y(x)$  — решение (6.20), то  $C_i$ , определяемые из (6.2), удовлетворяют системе уравнений (6.25). Наоборот, пусть  $C_i$  определяются из (6.25). Тогда функция  $y(x)$ , построенная согласно (6.23), удовлетворяет уравнению (6.20):

$$\begin{aligned} y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds - f(x) &= \lambda \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) C_m - \\ &- \lambda \int_a^b \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) \omega_m(s) \left[ \sum_{i=1}^n \Omega_i(s) C_i + f(s) \right] ds = \\ &= \lambda \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) \left[ C_m - \lambda \sum_{i=1}^n C_i \alpha_{im} - d_m \right] = 0. \end{aligned}$$

Проделав аналогичные преобразования для решения  $z(x)$  союзного уравнения (6.21), получаем

$$z(x) = \lambda \sum_{m=1}^n \omega_m(x) Q_m + g(x), \quad (6.27)$$

где коэффициенты

$$Q_m = \int_a^b \Omega_m(s) z(s) ds$$

удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$Q_i - \lambda \sum_{m=1}^n Q_m \alpha_{mi} = \gamma_i, \quad (6.28)$$

а

$$\gamma_i = \int_a^b g(x) \Omega_i(x) dx.$$

Итак, союзные интегральные уравнения (6.20) и (6.21) соответственно эквивалентны системам алгебраических уравнений (6.25) и (6.28) с транспонированными друг относительно друга главными матрицами. Обозначим через  $E$  единичную матрицу, через  $\alpha$  — матрицу с элементами  $\alpha_{im}$ , звездочкой обозначим транспонирование. Тогда согласно

сказанному выше главные определители систем (6.25) и (6.28), т. е. определители  $\det\{E - \lambda\alpha\}$  и  $\det\{E - \lambda\alpha^*\}$ , равны. Обозначим и тот и другой через  $D(\lambda)$ .

Корни определителя  $D(\lambda)$  совпадают с собственными значениями ядра  $K(x, s)$ . Действительно, пусть  $\lambda$  — собственное значение ядра  $K(x, s)$ , т. е. при  $f(x)=0$  имеется нетривиальное решение уравнения (6.20). При этом, как следует из (6.23) и (6.26), существует нетривиальное решение однородной системы (6.25). Это возможно только тогда, когда  $D(\lambda)=0$ . Наоборот, пусть  $\lambda$  не является собственным значением ядра  $K(x, s)$ . Тогда при  $f(x)=0$  существует лишь тривиальное решение уравнения (6.20). Следовательно, в силу (6.24) существует лишь тривиальное решение однородной системы (6.25), а это возможно только тогда, когда  $D(\lambda) \neq 0$ .

Точно так же можно убедиться, что корни  $D(\lambda)$  совпадают с собственными значениями союзного ядра  $K(s, x)$ . Таким образом имеет место

**Теорема 6.4.** *Собственные значения ядер  $K(x, s)$  и  $K(s, x)$  совпадают.*

Рассмотрим различные случаи.

1. Пусть  $\lambda$  не является собственным значением ядра  $K(x, s)$  или ядра  $K(s, x)$ . Тогда, по доказанному,  $D(\lambda) \neq 0$ . Следовательно, существует единственное решение систем (6.25) и (6.28) при любых  $d_i$  и  $\gamma_i$ , а значит, существует единственное решение уравнений (6.20) и (6.21). Тем самым доказана

**Теорема 6.5.** *Пусть  $\lambda$  не является собственным значением ядра  $K(x, s)$ . Тогда решение интегрального уравнения (6.20) и решение союзного уравнения (6.21) существуют и единственны при любых функциях  $f(x)$  и  $g(x)$ .*

2. Пусть  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K(x, s)$ , а  $f(x)=g(x)=0$ . Тогда  $D(\lambda)=0$ ,  $d_i=0$ ,  $\gamma_i=0$ . Матрицы однородных систем (6.25) и (6.28) являются транспонированными друг относительно друга. Следовательно, их ранг одинаков и существует равное число линейно независимых решений однородных алгебраических систем (6.25) и (6.28).

Пусть таких решений  $l$ . Обозначим их  $\vec{C} = \{\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n\}$  и  $\vec{Q} = \{\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_n\}$  соответственно ( $p=1, \dots, l$ ).

Убедимся, что функции  $y^p(x) = \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) \vec{C}_m^p$ , отвечающие различным  $p$ , линейно независимы между собой. Допустим противное. Пусть  $\sum_{p=1}^l \mu_p y^p(x) \equiv 0$ , где  $\sum_{p=1}^l \mu_p^2 \neq 0$ . Тогда  $\sum_{p=1}^l \mu_p \times \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) \vec{C}_m^p = \sum_{m=1}^n \Omega_m(x) \sum_{p=1}^l \mu_p \vec{C}_m^p = 0$ . В силу линейной неза-



зависимости функций  $\Omega_m(x)$  получаем  $\sum_{p=1}^n \mu_p \bar{C}_m^p = 0$  для всех  $m = 1, 2, \dots, n$ . Это противоречит линейной независимости решений однородной системы (6.25).

Аналогичным образом соотношения  $\bar{z}(x) = \sum_{m=1}^n \omega_m(x) \bar{Q}_m$

определяют  $l$  линейно независимых решений однородного уравнения (6.21). Таким образом, доказана

**Теорема 6.6.** Если  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K(x, s)$ , то однородное уравнение (6.20) и союзное с ним однородное уравнение (6.21) имеют одинаковое число линейно независимых собственных функций.

3. Пусть  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K(x, s)$ , а  $f(x) \neq 0$ . Тогда вопрос разрешимости уравнения (6.20) сводится к вопросу разрешимости неоднородной системы (6.25) с определителем  $D(\lambda) = 0$ . Как известно из линейной алгебры [23], для существования решения в этом случае необходимо и достаточно, чтобы правая часть системы (6.25), т. е.  $d = \{d_1, \dots, d_n\}$ , была ортогональна всем решениям однородной системы с транспонированной матрицей. Такой системой является однородная система (6.28). Отсюда для существования решения уравнения (6.20) необходимо

и достаточно, чтобы было выполнено  $\sum_{m=1}^n d_m Q_m = 0$ , где  $Q_m =$

$= \int_a^b z(s) \Omega_m(s) ds$ , а  $z(x)$  — произвольное решение однородного уравнения (6.21). Пользуясь выражением (6.26) для  $d_m$ , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \int_a^b f(x) \omega_m(x) dx \int_a^b z(s) \Omega_m(s) ds &= \int_a^b f(x) \int_a^b \left[ \sum_{m=1}^n \Omega_m(s) \omega_m(x) \right] \times \\ &\times z(s) ds dx = \int_a^b f(x) \left[ \int_a^b K(s, x) z(s) ds \right] dx = \int_a^b f(x) \frac{z(x)}{\lambda} dx = 0. \end{aligned}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы:

**Теорема 6.7.** Если  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K(x, s)$ , то для существования решения неоднородного уравнения (6.20) необходимо и достаточно, чтобы функция  $f(x)$  была ортогональна всем собственным функциям союзного ядра  $K(s, x)$ , отвечающим тому же  $\lambda$ .

Доказанные теоремы 6.5—6.7 называются теоремами Фредгольма.

2. **Случай невырожденного непрерывного ядра.** Покажем, что результаты предыдущего пункта могут быть перенесены и на случай невырожденного ядра.

Пусть  $K(x, z)$  — непрерывная при  $x \in [a, b]$  и  $s \in [a, b]$  функция. По теореме Вейерштрасса [19] функция  $K(x, z)$  в этом случае может быть сколь угодно точно приближена полиномами, т. е. существует такой полином  $P(x, z) = \sum_{n+k \leq N} a_{nk} x^n s^k$ , что при  $x, s \in [a, b]$   $|K(x, s) - P(x, s)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — любое наперед заданное число. Выберем  $0 < \varepsilon < \frac{1}{|\lambda|(b-a)}$ . Таким образом,  $K(x, s) = P(x, s) + Q(x, s)$ , где

$|Q(x, s)| < \varepsilon$ , а  $P(x, s)$  — вырожденное ядро. Интегральное уравнение (6.20) принимает вид

$$y(x) - \lambda \int_a^b Q(x, s)y(s)ds = \lambda \int_a^b P(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (6.29)$$

Введем функцию

$$\Phi(x) = y(x) - \lambda \int_a^b Q(x, s)y(s)ds. \quad (6.30)$$

Ядро  $Q(x, s)$  таково, что  $|\lambda||Q|(b-a) \leq |\lambda|\varepsilon(b-a) < 1$ . Тогда по теореме 6.1 функция  $y(x)$  однозначно выражается через  $\Phi$ :

$$y(x) = \Phi(x) + \lambda \int_a^b R(x, \xi, \lambda) \Phi(\xi) d\xi,$$

где  $R(x, s, \lambda)$  — резольвента ядра  $Q(x, s)$ . Уравнение (6.29) принимает вид

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^b P \left[ \Phi + \lambda \int_a^b R \Phi d\xi \right] ds + f = \lambda \int_a^b T(x, s, \lambda) \Phi(s) ds + f(x), \quad (6.31)$$

где

$$\begin{aligned} T(x, s, \lambda) &= P(x, s) + \lambda \int_a^b P(x, \xi) R(\xi, s, \lambda) d\xi = \\ &= \sum_{k+n \leq N} a_{nk} x^n \left[ s^k + \int_a^b \xi^k R(\xi, s, \lambda) d\xi \right] \end{aligned}$$

— вырожденное и непрерывное ядро.

Решение уравнения (6.20) — функция  $y(x)$  — взаимно однозначно связано с решением  $\Phi(x)$  уравнения (6.31). При этом, как видно из соотношения (6.30), функции  $y(x)$  и  $\Phi(x)$

одновременно либо равны, либо не равны тождественно нулю. Отсюда нетривиальное решение однородных уравнений (6.20) и (6.31) существует при одних и тех же значениях  $\lambda$ , т. е.  $\lambda$  является (или не является) собственным значением ядер  $K$  и  $T$  одновременно.

Мы свели уравнение (6.20) с невырожденным ядром  $K(x, s)$  к уравнению (6.31) с вырожденным ядром  $T(x, s, \lambda)$  таким образом, что неоднородность  $f(x)$  в этих уравнениях одинакова. Теперь преобразуем союзное уравнение (6.21) к уравнению с вырожденным ядром, союзным с  $T(x, s, \lambda)$ , сохраняя функцию  $z(x)$ .

(Этот способ преобразования связан с теоремой 6.7.)

Представим уравнение (6.21) в виде

$$z(x) - \lambda \int_a^b Q(s, x)z(s) ds = \lambda \int_a^b P(s, x)z(s) ds + g(x).$$

Рассматривая правую часть последнего соотношения как неоднородность, согласно (6.17) получаем

$$z(x) = \lambda \int_a^b P(s, x)z(s) ds + g(x) + \lambda \int_a^b \hat{R}(x, t, \lambda) \left[ \lambda \int_a^b P(s, t)z(s) ds + g(t) \right] dt = \lambda \int_a^b \hat{T}(x, s, \lambda)z(s) ds + g_1(x), \quad (6.32)$$

где  $\hat{R}(x, s, \lambda)$  — резольвента ядра  $Q(s, x)$ ,

$$g_1(x) = g(x) + \int_a^b \hat{R}(x, t, \lambda)g(t)dt,$$

а

$$\hat{T}(x, s, \lambda) = P(s, x) + \int_a^b P(s, t)\hat{R}(x, t, \lambda)dt. \quad (6.33)$$

Убедимся в том, что  $\hat{T}(x, s, \lambda) = T(s, x, \lambda)$ . Действительно, пусть  $Q_n(x, s)$  — повторное ядро для  $Q(x, s)$  порядка  $n$ , а  $\hat{Q}_n(x, s)$  — повторное ядро того же порядка для  $Q(s, x)$ . Тогда из (4.11) следует, что  $\hat{Q}_n(x, s) = Q_n(s, x)$ . Далее согласно (6.18) имеем

$$\begin{aligned} \hat{R}(x, s, \lambda) &= Q(s, x) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-1} \hat{Q}_n(x, s) = Q(s, x) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-1} Q_n(s, x) = R(s, x, \lambda). \end{aligned}$$

Тогда из (6.33) следует  $\hat{T}(x, s, \lambda) = T(x, s, \lambda)$ , что и требовалось.

Таким образом, союзные интегральные уравнения (6.20) и (6.21) эквивалентны уравнениям (6.31) и (6.32) с вырожденными союзными ядрами. Параметр  $\lambda$  является или не является собственным значением ядер  $K(x, s)$  и  $T(x, s, \lambda)$  одновременно; совпадают неоднородности  $f(x)$  в (6.20) и (6.31); совпадают решения однородных уравнений (6.21) и (6.32). Это позволяет перенести утверждения теорем Фредгольма 6.5—6.7 на случай невырожденных ядер. А именно:

1. Если  $\lambda$  не является собственным значением ядра  $K(x, s)$ , то (6.31) и (6.32), а следовательно, (6.20) и (6.21) разрешимы при любых функциях  $f(x)$  и  $g(x)$ .

2. Пусть  $\lambda$  является собственным значением ядра. Покажем, что линейно независимым между собой собственным функциям  $\Phi_1, \dots, \Phi_l$  однородного уравнения (6.31) соответствуют линейно независимые собственные функции  $y_1, \dots, y_l$  однородного уравнения (6.20). Действительно, допустим противное, пусть  $\Phi_1, \dots, \Phi_l$  линейно независимы, а для соответствующих  $y_1, \dots, y_l$  выполнено соотношение  $\sum_{i=1}^l C_i y_i(x) \equiv 0$ , где  $\sum_{i=1}^l C_i^2 \neq 0$ . Тогда, умножая (6.30)

последовательно на  $C_i$  ( $i=1, \dots, l$ ) и суммируя, получим слева  $\sum_{i=1}^l C_i \Phi_i(x)$ , а справа — нуль. Равенство  $\sum_{i=1}^l C_i \Phi_i(x) = 0$  противоречит предположению о независимости  $\Phi_i(x)$ .

Однородные союзные уравнения с вырожденным ядром (6.31) и (6.32) согласно результатам п. 1 имеют равное число линейно независимых собственных функций. Следовательно, аналогичным свойством обладают однородные уравнения (6.20) и (6.21).

3. Если  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K(x, s)$ , то для разрешимости (6.31), а следовательно, и (6.20) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ортогональности  $(f, z) = \int_a^b f(x)z(x)dx = 0$ , где  $z(x)$  — любая собственная функция союзного ядра  $K(s, x)$ , соответствующая собственному значению  $\lambda$ .

Таким образом, результаты п.1 (теоремы 6.5—6.7) переносятся на случай невырожденных ядер.

**З а м е ч а н и е.** Из теорем 6.5 и 6.7 следует так называемая

**Альтернатива Фредгольма.** Либо интегральное уравнение (6.20) имеет единственное решение при любой функции  $f(x)$ , либо существует нетривиальное решение союзного однородного уравнения.

### 3. Обобщение теорем Фредгольма на случай полярных ядер.

Покажем, что полярное ядро  $K(x, s) = \frac{\Phi(x, s)}{|x - s|^\alpha}$  может быть приближено непрерывным вырожденным ядром  $P(x, s)$ , так что для функции  $Q(x, s) = K(x, s) - P(x, s)$  выполнено  $\int_a^b |Q(x, s)| ds < \frac{1}{|\lambda|}$ , т. е.  $Q(x, s)$  является „малым“ полярным ядром.

Действительно, рассмотрим ядро  $S(x, s)$ , определенное следующим образом:

$$S(x, s) = \begin{cases} K(x, s) & \text{при } |x - s| \geq \gamma, \\ \frac{\Phi(x, s)}{\gamma^\alpha} & \text{при } |x - s| \leq \gamma, \end{cases}$$

где  $\gamma = \left[ \frac{1-\alpha}{4H|\lambda|} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , а  $H = \sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} |\Phi(x, s)|$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b |K(x, s) - S(x, s)| ds &= \int_{x-\gamma}^{x+\gamma} |K(x, s) - S(x, s)| ds \leq \\ &\leq H \int_{x-\gamma}^{x+\gamma} \left| \frac{1}{|x-s|^\alpha} - \frac{1}{\gamma^\alpha} \right| ds \leq \frac{2H}{1-\alpha} \gamma^{1-\alpha} < \frac{1}{2|\lambda|}. \end{aligned}$$

Ядро  $S(x, s)$  является непрерывной функцией и, следовательно, может быть приближено полиномом  $P(x, s) = \sum_{n+k \leq N} a_{nk} x^n s^k$  так, что  $|S(x, s) - P(x, s)| < \frac{1}{|\lambda|(b-a)}$ . При этом

$$\begin{aligned} \int_a^b |S(x, s) - P(x, s)| ds &< \frac{1}{2|\lambda|}. \text{ В результате получаем} \\ \int_a^b |K(x, s) - P(x, s)| ds &\leq \int_a^b |K(x, s) - S(x, s)| ds + \\ &+ \int_a^b |S(x, s) - P(x, s)| ds < \frac{1}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Итак,  $Q(x, s)$  является „малым“ полярным ядром в том смысле, как указано выше. Используем результаты п. 3 § 17 о разрешимости уравнений Фредгольма с малым полярным ядром и представлении решения при помощи резольвенты. Тогда можно повторить рассуждения п. 2 § 18 и убедиться, что теоремы Фредгольма переносятся на случай полярных ядер.

# § 19.

## РЕЗОЛЬВЕНТА НЕПРЕРЫВНОГО НЕСИММЕТРИЧНОГО ЯДРА ПРИ «БОЛЬШИХ» $\lambda$

В § 16, 17 настоящей главы было рассмотрено понятие резольвенты для интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x) \quad (6.34)$$

в случае симметричного ядра и в случае „малых“  $\lambda$ . Резольвента определялась как функция, при помощи которой решение уравнения (6.34) дается в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds. \quad (6.35)$$

Было показано, что для произвольного непрерывного ядра при  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ , где  $M = \sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} |K(x, s)|$ , резольвента равна сумме ряда

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s). \quad (6.36)$$

Остается открытым вопрос: существует ли резольвента несимметричного ядра при  $|\lambda| > \frac{1}{M(b-a)}$ , т. е. при таких

$\lambda$ , при которых ряд (6.36), вообще говоря, расходится? Покажем, что резольвента существует при любом  $\lambda$ , отличном от собственного значения ядра  $K(x, s)$ .

Убедимся прежде всего в том, что резольвента в виде ряда (6.36) при  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$  удовлетворяет соотношению

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) R(\xi, s, \lambda) d\xi. \quad (6.37)$$

Для этого в (6.36) заменяем обозначение  $x$  на  $\xi$ , умножаем обе части (6.36) на  $\lambda K(x, \xi)$  и интегрируем по  $\xi$ . Получаем

$$\lambda \int_a^b K(x, \xi) R(\xi, s, \lambda) d\xi = \int_a^b K(x, \xi) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(\xi, s) \right] d\xi. \quad (6.38)$$

Меняем порядок суммирования и интегрирования в правой части (6.38), что можно сделать в силу равномерной сходимости ряда. Имеем

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b K(x, \xi) R(\xi, s, \lambda) d\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K(x, \xi) K_n(\xi, s) ds = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, s) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s) - \\ &- K(x, s) = R(x, s, \lambda) - K(x, s), \end{aligned}$$

что и требовалось проверить.

Пусть ядро  $K(x, s)$  непрерывно и  $\lambda \neq \lambda_i$ , где  $\lambda_i$  — собственные значения ядра  $K(x, s)$ . Рассмотрим соотношение (6.37) при фиксированном  $s$ , считая  $R$  функцией  $x$ . Согласно доказанной выше теореме 6.5 существует единственное решение интегрального уравнения (6.37). Это решение определяет зависимость  $R$  от  $x$  при фиксированном  $s$ . Изменяя значение  $s$  на интервале  $[a, b]$ , получаем, что соотношение (6.37) однозначно определяет некоторую функцию  $R(x, s, \lambda)$  при  $\lambda \neq \lambda_i$ ,  $x \in [a, b]$  и  $s \in [a, b]$ .

Имеет место следующая

**Теорема 6.8.** Пусть  $K(x, s)$  — непрерывное (в общем случае несимметричное) ядро интегрального уравнения (6.34), а  $\lambda$  не совпадает ни с одним собственным значением этого ядра. Тогда существует единственное решение уравнения (6.34), которое может быть представлено в форме (6.35), где резольвента  $R(x, s, \lambda)$  определяется соотношением (6.37).

**Доказательство.** Существование и единственность решения уравнения (6.34) в рассматриваемом случае следуют из теоремы Фредгольма 6.5, а существование и единственность решения уравнения (6.37) показаны выше. Осталось проверить, что решение в форме (6.35), где  $R(x, s, \lambda)$  определяется из (6.37), действительно удовлетворяет уравнению (6.34).

Подставим выражение (6.35) в уравнение (6.34) и перенесем все слагаемые влево. Получим

$$\begin{aligned} f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds - \lambda \int_a^b K(x, s) \left[ f(s) + \right. \\ \left. + \lambda \int_a^b R(s, t, \lambda) f(t) dt \right] ds - f(x) = \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds - \\ - \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds - \lambda^2 \int_a^b f(s) \left[ \int_a^b K(x, t) R(t, s, \lambda) dt \right] ds = \\ = \lambda \int_a^b f(s) \left[ R(x, s, \lambda) - K(x, s) - \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, s, \lambda) dt \right] ds = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место в силу (6.37). Тем самым проверено, что решение в форме (6.35) при условии (6.37) удовлетворяет (6.34), что и требовалось. Теорема доказана.

Таким образом резольвента определена уравнением (6.37) не только при „малых“  $\lambda$ , там, где сходится ряд (6.36), но и при произвольных  $\lambda \neq \lambda_i$ . Для симметричных ядер существование резольвенты при  $\lambda \neq \lambda_i$  следует также из ранее полученного соотношения (6.9).

**Пример.** Вернемся к интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-s)y(s)ds + f(x), \quad (6.39)$$

рассмотренному в качестве примера в § 17. Там при помощи соотношения (6.36), при  $|\lambda| < 2/\pi$  была найдена резольвента ядра  $K(x, s) = \sin(x-s)$

$$R(x, s, \lambda) = \frac{\sin(x-s) - \lambda \frac{\pi}{2} \cos(x-s)}{1 + \left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)^2}. \quad (6.40)$$

Эта функция является аналитической по переменному  $\lambda$  всюду кроме точек  $\lambda = \pm i \frac{2}{\pi}$ . Согласно доказанному выше

$R(x, s, \lambda)$  удовлетворяет соотношению (6.37) внутри круга равномерной сходимости ряда (6.36), т. е. при  $|\lambda| < 2/\pi$ . Как известно [22], при этом аналитическое продолжение  $R(x, s, \lambda)$  на комплексную плоскость также удовлетворяет соотношению (6.37). Следовательно, выражение (6.40) определяет резольвенту не только при  $|\lambda| < 2/\pi$ , но и при любых  $\lambda \neq \pm i \frac{2}{\pi}$ . (Нетрудно проверить, что  $\lambda = \pm i \frac{2}{\pi}$  являются соб-

ственными значениями ядра  $K(x, s)$ .)

## § 20.

### УРАВНЕНИЕ С ЯДРОМ,

### ЗАВИСЯЩИМ ОТ РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

Многие задачи математической физики приводят к интегральным уравнениям, в которых ядро зависит от разности аргументов:  $K(x, s) = K(x-s)$ . При решении таких уравнений часто бывает целесообразно использовать преобразование Лапласа или Фурье. В настоящем параграфе изучается случай, когда ядро зависит от разности аргументов и интегрирование производится по бесконечному промежутку.



Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s) y(s) ds + f(x). \quad (6.41)$$

Обозначим символом  $G$  класс функций, абсолютно интегрируемых на бесконечном участке и разложимых в интеграл Фурье. Иными словами, если  $g(x) \in G$ , то  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$ , оп-

ределена функция  $\tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} g(x) dx$ , определен интеграл

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \tilde{g}(\omega) d\omega$  и выполнено равенство  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} \times \right.$   
 $\times g(s) ds \Big\} d\omega = g(x)$ . В частности, к классу  $G$  относятся кусочно-гладкие, абсолютно интегрируемые на участке  $x \in (-\infty, \infty)$  функции [14].

Пусть функции  $f(x)$  и  $K(x)$ , заданные в уравнении (6.41), принадлежат классу  $G$ . Предположим, что существует решение уравнения (6.41) — функция  $y(x) \in G$ . Найдем его, используя преобразование Фурье.

Умножаем (6.41) на  $e^{i\omega x}$  и интегрируем по  $x$ . Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} y(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s) y(s) ds \right\} dx.$$

В силу абсолютной интегрируемости  $K(x)$  и  $y(x)$  можно поменять порядок интегрирования в правой части последнего равенства [17]. Обозначим  $y(\omega)$ ,  $\tilde{f}(\omega)$  и  $\tilde{K}(\omega)$  изображения Фурье соответственно функций  $y(x)$ ,  $f(x)$  и  $K(x)$ . Получаем

$$\tilde{y}(\omega) - \tilde{f}(\omega) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} y(s) e^{i\omega s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s) e^{i\omega(x-s)} dx \right\} ds =$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} y(s) e^{i\omega s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{i\omega \alpha} d\alpha \right\} ds = \lambda \tilde{y}(\omega) \tilde{K}(\omega).$$

Отсюда  $\tilde{y}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{1 - \lambda \cdot \tilde{K}(\omega)}$ . Сделав обратное преобразование Фурье, находим

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\tilde{f}(\omega)}{1 - \lambda \cdot \tilde{K}(\omega)} d\omega. \quad (6.42)$$

Итак, если существует решение уравнения (6.41) из класса  $G$ , то оно определяется формулой (6.42) и, следовательно, единственно в рассматриваемом классе функций.

Пусть  $\lambda$ ,  $K(x)$  и  $f(x)$  таковы, что соотношение (6.42) определяет  $y(x) \in G$ . Тогда, подставляя эту функцию в (6.41) и повторив преобразования, проведенные выше, получим тождество. Это означает, что  $y(x)$ , определяемая из (6.42) и принадлежащая классу  $G$ , действительно является решением интегрального уравнения (6.41).

Приведем теперь достаточные условия, при которых соотношение (6.42) определяет функцию  $y(x) \in G$ :

1) значение параметра  $\lambda$  таково, что  $1 - \lambda \cdot \tilde{K}(\omega) \neq 0$  при  $\omega \in (-\infty, \infty)$ ;

2)  $\tilde{f}(\omega)$  и  $\tilde{K}(\omega)$  дважды дифференцируемы и абсолютно интегрируемы вместе с производными до второго порядка при  $\omega \in (-\infty, \infty)$ .

При выполнении перечисленных условий функция  $\tilde{y}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{1 - \lambda \cdot \tilde{K}(\omega)}$  и две ее производные абсолютно интегрируемы по  $\omega$  на бесконечной прямой. В этом случае [14] преобразование (6.42) определяет непрерывную функцию  $y(x)$ , для которой справедлива оценка  $|y(x)| = o(|x|^{-2})$ . Следовательно, функция  $y(x)$  абсолютно интегрируема на бесконечной прямой.

Далее, функция  $\tilde{y}(\omega)$  при наложенных на  $\lambda$ ,  $\tilde{K}(\omega)$  и  $\tilde{f}(\omega)$  условиях является гладкой, абсолютно интегрируемой функцией и, следовательно, может быть разложена в интеграл Фурье. Это означает, что определено преобразование (6.42) и обратное к нему преобразование, т. е. существуют интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{i\omega x} dx = \tilde{y}(\omega)$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \tilde{y}(\omega) d\omega = 2\pi y(x)$ .

Следовательно, функция  $y(x)$ , определяемая из (6.42), разложима в интеграл Фурье и  $y(x) \in G$ .

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-s|} y(s) ds + e^{-b|x|} \quad (a > 0, b > 0). \quad (6.43)$$

Производим преобразование Фурье ядра и неоднородности уравнения

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-b|x|} dx = \frac{2b}{b^2 + \omega^2}, \quad \tilde{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-a|x|} dx = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

а. Пусть  $\lambda < \frac{a}{2}$ . При этом выполнено условие  $1 - \lambda \times$

$\times \tilde{K}(\omega) \neq 0$  для любых действительных  $\omega$ . Соотношение (6.42) получаем в виде

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\frac{2b}{b^2 + \omega^2}}{1 - \lambda \frac{2a}{a^2 - \omega^2}} d\omega. \quad (6.44)$$

Несобственный интеграл (6.44) сходится абсолютно, равномерно по  $x$  и определяет непрерывную функцию  $y(x)$ . Вычисляем интеграл (6.44) при помощи теории вычетов, используя лемму Жордана. При  $x > 0$  замыкаем контур интегрирования дугой в полуплоскости  $\text{Im } \omega < 0$ , при  $x < 0$  — дугой в полуплоскости  $\text{Im } \omega > 0$ . Получаем

$$y(x) = \frac{1}{b^2 - a^2 + 2\lambda a} \left[ (b^2 - a^2) e^{-b|x|} + \frac{2\lambda ab}{\sqrt{a^2 - 2\lambda a}} e^{-|x|\sqrt{a^2 - 2\lambda a}} \right].$$

6. Пусть  $\lambda \geq a/2$ . Тогда существует нетривиальное решение однородного уравнения

$$y(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-s|} y(s) ds. \quad (6.45)$$

А именно рассмотрим соотношение  $1 - \lambda \tilde{K}(\omega_1) = 1 - \lambda \frac{2a}{a^2 + \omega_1^2} = 0$ . Из него находим  $\omega_1 = \sqrt{2a\lambda - a^2}$ . Нетрудно проверить, что  $y(x) = Ce^{-i\omega_1 x}$ , где  $C$  — произвольная константа, является решением уравнения (6.45). Действительно, подставляем эту функцию в (6.45), делим соотношение на  $e^{-i\omega_1 x}$  и переносим слагаемые в одну часть. Имеем

$$\begin{aligned} C - \lambda e^{i\omega_1 x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-s|} C e^{-i\omega_1 s} ds &= C \left[ 1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-s|} \times \right. \\ &\times e^{i\omega_1(x-s)} ds \left. \right] = C \left[ 1 - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|a|} e^{-i\omega_1 a} da \right] = \\ &= C [1 - \lambda \cdot \tilde{K}(\omega_1)] = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось проверить.

Замечание. Из рассмотренного примера видно, что множество собственных значений уже не является последовательностью, а представляет собой полупрямую  $\lambda \geq a/2$ . Это характерно для рассматриваемого класса интегральных уравнений.

## § 21.

## СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad (7.1)$$

где  $K(x, s)$  и  $f(x)$  — непрерывные функции при  $a \leq s \leq x \leq b$ .

**Теорема 7.1.** Уравнение (7.1) имеет единственное непрерывное решение при любом значении  $\lambda$ . Это решение может быть найдено путем последовательных приближений.

**Доказательство.** Докажем существование решения. Для этого рассмотрим последовательность функций, определяемых рекуррентным соотношением

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y_n(s)ds + f(x), \quad (7.2)$$

где  $y_0(x) \equiv 0$ . Функции  $y_n(x)$ , очевидно, непрерывны. Представим  $y_n(x)$  в виде

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}). \quad (7.3)$$

Обозначим  $\sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} |K(x, s)| = M$ ,  $\sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = F$ . Имеем последовательность оценок:

$$|y_1 - y_0| = |f| \leq F,$$

$$|y_2 - y_1| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x, s)f(s)ds \right| \leq |\lambda| M(x-a)F,$$

$$|y_{k+1} - y_k| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x, s)(y_k(s) - y_{k-1}(s))ds \right| \leq |\lambda|^k M^k \frac{(x-a)^k}{k!} F.$$

Члены ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1})$  мажорируются членами числового

ряда  $F \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k M^k (b-a)^k}{k!} = F e^{|\lambda| M (b-a)} - F$ . Следовательно, по

признаку Вейерштрасса ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1})$ , частичная сумма которого присутствует в (7.3), сходится равномерно:  $y_n(x) \Rightarrow \Rightarrow y(x)$ , где  $y(x)$  — непрерывная на  $[a, b]$  функция. Для  $y(x)$  выполнена оценка

$$|y(x)| \leq F e^{|\lambda| M (b-a)}. \quad (7.4)$$

В силу равномерной сходимости  $\{y_n(x)\}$  можно перейти в (7.2) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Получим соотношение (7.1). Таким образом, функция  $y(x)$  — предел равномерно сходящейся последовательности  $\{y_n(x)\}$  — является решением уравнения (7.1).

Докажем единственность решения уравнения (7.1). Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — два непрерывных решения уравнения (7.1), а  $\bar{y}(x)$  — их разность. Тогда  $\bar{y}(x)$  удовлетворяет однородному уравнению

$$\bar{y}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) \bar{y}(s) ds. \quad (7.5)$$

Обозначим  $\sup_{a \leq x \leq b} |\bar{y}(x)| = C$ . Оценивая мажорантным способом правую часть (7.5), получим  $|\bar{y}(x)| \leq |\lambda| M C (x-a)$ . Подставляя эту оценку в правую часть (7.5), получим новую оценку

$$|\bar{y}(x)| \leq M^2 C |\lambda|^2 \int_a^x (s-a) ds = \frac{|\lambda|^2 M^2 C (x-a)^2}{2!}. \text{ И так далее. После } k\text{-го шага имеем оценку}$$

$$|\bar{y}(x)| \leq C \frac{|\lambda|^k M^k (x-a)^k}{k!}. \quad (7.6)$$

Если  $y(x) \neq 0$ , то найдется  $x_0$ , при котором  $y(x_0)$  отлично от нуля. С другой стороны, для  $\forall \varepsilon > 0$  при достаточно больших  $k$  выполнено неравенство  $C \frac{|\lambda|^k M^k (b-a)^k}{k!} < \varepsilon$ . Из (7.6)

получаем, что  $|\bar{y}(x_0)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — произвольная сколь угодно малая величина. Выбрав  $0 < \varepsilon < \frac{\bar{y}(x_0)}{2}$ , получим противоречие.

Следовательно,  $y(x) \equiv 0$  и решение уравнения (7.1) единственно.

**З а м е ч а н и я.** 1. В силу доказанной теоремы однородное уравнение (7.1) имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, однородное уравнение Вольтерра второго рода не имеет собственных значений.

2. Поскольку собственных значений не существует, то множитель  $\lambda$  в записи уравнения Вольтерра обычно опускают.

**Пример.** Решить уравнение

$$y(x) = \int_0^x (x-s)y(s)ds + x^2. \quad (7.7)$$

Найдем решение двумя различными способами.

а. Продифференцируем уравнение (7.7) дважды. Имеем  $y'(x) = \int_0^x y(s)ds + 2x$ ,  $y'' = y + 2$ . Решая получившееся дифференциальное уравнение с учетом условий  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , находим  $y(x) = 2(\operatorname{ch} x - 1)$ .

б. Найдем решение путем последовательных приближений. Выбираем  $y_0(x) = 0$ . Последующие приближения определяем по формуле

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (x-s)y_n(s)ds + x^2.$$

Находим  $y_1(x) = x^2$ ,

$$y_2(x) = \int_0^x (x-s)s^2ds + x^2 = x^2 + \frac{x^4}{12},$$

...

$$y_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{12} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot 2.$$

Отсюда  $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 2(\operatorname{ch} x - 1)$ .

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x) \quad (7.8)$$

Вольтерра первого рода. Пусть  $K(x, s)$  и  $f(x)$  — непрерывные функции при  $a \leq s \leq x \leq b$ . Мы не будем заниматься общей теорией таких уравнений, заметим только, что при произвольной непрерывной  $f(x)$  непрерывного решения  $y(x)$  может не существовать. Действительно, необходимым условием существования непрерывного решения является, очевидно, условие  $f(0) = 0$ , так как левая часть (7.8) в случае непрерывного  $y(x)$  обращается в нуль при  $x = 0$ .

При некоторых условиях уравнение (7.8) может быть сведено к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Пусть  $K(x, s)$  и  $f(x)$  дифференцируемы по  $x$  и  $K(x, x) \neq 0$  всюду на  $[a, b]$ . Тогда, дифференцируя соотношение (7.8), имеем

$$y(x)K(x, x) + \int_a^x K'_x(x, s)y(s)ds = f'(x).$$

Деля на  $K(x, x)$ , приходим к уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x) = \int_a^x P(x, s)y(s)ds + g(x),$$

где  $P(x, s) = \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)}, \quad g(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)}.$

**Пример.** Получим решение уравнения

$$\int_0^x (x + s + 1)y(s)ds = x^2.$$

Дифференцируя, имеем

$$y(x)(2x + 1) + \int_0^x y(s)ds = 2x.$$

При этом  $y(0) = 0$ .

Полученное уравнение Вольтерра второго рода будем также решать путем дифференцирования. Получим  $y'(2x + 1) + 3y = 2$ , откуда

$$y(x) = \frac{2}{3} \left( 1 - (2x + 1)^{-\frac{3}{2}} \right).$$

## § 22.

### РЕЗОЛЬВЕНТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Обозначим оператор Вольтерра через  $B$ :

$$By = \int_a^x K(x, s)y(s)ds.$$

Определим повторное ядро оператора Вольтерра аналогично тому, как это было сделано для оператора Фредгольма в гл. 4:

$$B^n y = \int_a^x K_n(x, s)y(s)ds. \quad (7.9)$$

Проделявая вычисления, аналогичные проведенным в гл. 4,

$$\begin{aligned} B^2 y &= \int_a^x K(x, t) dt \int_a^t K(t, s) y(s) ds = \\ &= \int_a^x y(s) ds \int_s^x K(x, t) K(t, s) dt = \int_a^x K_2(x, s) y(s) ds, \end{aligned}$$

получим выражение для

$$K_2(x, s) = \int_s^x K(x, t) K(t, s) dt.$$

Методом индукции нетрудно получить представление для  $K_n(x, s)$ , аналогичное (4.11)

$$K_n(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt.$$

(Предлагается это сделать самим в порядке упражнения.)

Пусть  $M = \sup_{a \leq s \leq x \leq b} |K(x, s)|$ . Тогда для повторных ядер справедлива оценка

$$|K_n(x, s)| \leq \frac{M^n (x-s)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (7.10)$$

Действительно, имеем

$$|K(x, s)| \leq M,$$

$$|K_2(x, s)| \leq \int_s^x M^2 dt = M^2 (x-s),$$

$$\begin{aligned} |K_3(x, s)| &\leq \left| \int_s^x K(x, t) K_2(t, s) dt \right| \leq M^3 \int_s^x (t-s) dt = \\ &= \frac{M^3 (x-s)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Рассуждая далее по индукции, приходим к (7.10).

В предыдущем параграфе было показано, что решение  $y(x)$  уравнения (7.1) может быть получено как предел последовательности

$$y_n = f + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i B^i f.$$



Используя (7.9), имеем

$$\begin{aligned} y_n(x) &= f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i \int_a^x K_i(x, s) f(s) ds = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{i-1} K_i(x, s) \right] f(s) ds. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Из оценки (7.10) следует по признаку Вейерштрасса равномерная сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x, s)$$

при любом  $\lambda$ , поскольку его члены удовлетворяют неравенству

$$|\lambda^{i-1} K_i(x, s)| \leq \frac{|\lambda|^{i-1} M^i(x-s)^{i-1}}{(i-1)!} \leq \frac{|\lambda|^{i-1} M^{i-1}(b-a)^{i-1}}{(i-1)!},$$

а правая часть этой цепочки неравенств представляет собой общий член сходящегося ряда.

Обозначим

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s). \quad (7.12)$$

В силу равномерной сходимости ряда функция  $R(x, s, \lambda)$  является непрерывной при  $a \leq s \leq x \leq b$  и любых  $\lambda$ . В силу той же равномерной сходимости можно перейти в (7.11) к пределу под знаком интеграла. Получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s) ds. \quad (7.13)$$

Это соотношение представляет собой выражение для решения уравнения (7.1) через резольвенту  $R(x, s, \lambda)$ . Результат можно сформулировать в виде теоремы:

**Теорема 7.2.** *Решение уравнения (7.1) представимо в виде (7.13), где резольвента  $R(x, s, \lambda)$ , определяемая рядом (7.12), является непрерывной функцией при  $a \leq s \leq x \leq b$  и любым  $\lambda$ .*

**Пример.** Построим резольвенту для уравнения (7.7). Имеем

$$\begin{aligned} K(x, s) &= x - s, \quad K_2(x, s) = \int_s^x (x-t)(t-s) dt = \\ &= \frac{(x-s)^3}{3!}, \dots, \quad K_n(x, s) = \frac{(x-s)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[V\bar{\lambda}(x-s)]^{2n+1}}{V\bar{\lambda}(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sh} V\bar{\lambda}(x-s)}{V\bar{\lambda}}.$$

Таким образом, при  $\lambda=1$  получаем решение уравнения (7.7)

$$\begin{aligned} y(x) &= x^2 + 1 \int_0^x R(x, s, 1) s^2 ds = x^2 + \\ &+ \int_0^x \operatorname{sh}(x-s) s^2 ds = 2 [\operatorname{ch} x - 1]. \end{aligned}$$

### § 23.

#### УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА С ЯДРОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

##### 1. Случай непрерывного ядра. Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \int_0^x K(x-s)y(s)ds + f(x) \quad (0 \leq x < \infty). \quad (7.14)$$

Пусть  $K(x)$  и  $f(x)$  — непрерывные функции при  $x \geq 0$ , причем  $K_0 = \sup_{0 \leq x < \infty} |K(x)| < \infty$ ,  $f_0 = \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x)| < \infty$ . Из (7.4) следует, что для решения  $y(x)$  уравнения (7.14) справедлива оценка

$$|y(x)| \leq f_0 e^{K_0 x}. \quad (7.15)$$

При этих условиях для  $K(x)$ ,  $f(x)$  и  $y(x)$  определено преобразование Лапласа. Как известно (см. [22]), это преобразование ставит в соответствие оригиналу — функции действительной переменной  $\varphi(x)$  — функцию комплексной переменной  $\Phi(p)$  (которая называется изображением) по правилу  $\Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} \varphi(x) dx$ . Тот факт, что функции  $\varphi(x)$  и  $\Phi(p)$  связаны преобразованием Лапласа, будем обозначать символом  $\Phi(p) \doteq \varphi(x)$ .

Пусть  $Y(p) \doteq y(x)$ ,  $F(p) \doteq f(x)$  и  $L(p) \doteq K(x)$ . Интеграл, входящий в уравнение (7.14), представляет собой свертку функций  $K(x)$  и  $y(x)$ . Изображением свертки является произведение изображений  $\int_0^x K(x-s)y(s)ds \doteq L(p)Y(p)$ . Таким образом, уравнению (7.14) соответствует соотношение между изображениями  $Y(p) = L(p)Y(p) + F(p)$ . Отсюда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1-L(p)}. \quad (7.16)$$

Поскольку функция  $y(x)$  удовлетворяет неравенству (7.15), то функция  $Y(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > K_0$  [22]. Следовательно, можно выбрать такое  $a$ , что  $a > \operatorname{Re} p_i$  для всех особых точек  $p_i$  функции  $Y(p)$ . Сделав обратное пре-

образование Меллина  $y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{px} \frac{F(p)}{1-L(p)} dp$ , находим  $y(x)$ .

**Пример.** Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-s)y(s)ds + e^{-x}. \quad (7.17)$$

В данном случае

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} e^{-x} dx = \frac{1}{p+1}, \quad L(p) = \int_0^\infty e^{-px} \sin x dx = \frac{1}{p^2+1}.$$

Соотношение (7.16) имеет вид  $Y(p) = \frac{\frac{1}{p+1}}{1 - \frac{1}{p^2+1}} = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)}$ .

Функция  $Y(p)$  имеет полюс первого порядка при  $p = -1$  и полюс второго порядка в нуле. Поэтому в качестве  $a$  можно выбрать любое положительное число. Замыкаем контур интегрирования дугой полуокружности, лежащей слева от прямой  $(a-i\infty, a+i\infty)$ , и используем лемму Жордана. Получаем решение уравнения (7.17):

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{px} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} dp = \operatorname{Res} \left[ e^{px} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)}, -1 \right] + \\ + \operatorname{Res} \left[ e^{px} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)}, 0 \right] = 2e^{-x} + x + 1.$$

**2. Уравнение Вольтерра с ядром вида  $K(x, s) = \frac{1}{(x-s)^\alpha}$ .**

а. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{y(s)}{(x-s)^\alpha} ds = f(x) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (7.18)$$

(при  $\alpha = 1/2$  уравнение (7.18) называется *уравнением Абеля*). Уравнение (7.18) относится к уравнениям типа Вольтерра первого рода. Специальный вид ядра позволяет получить решение уравнения (7.18) эффективным образом.

Пусть  $f(x)$  является непрерывно дифференцируемой функцией. Найдем решение  $y(x)$  в явном виде. Для этого умножим (7.18) на  $(t-x)^{\alpha-1}$  и проинтегрируем по  $x$ . Получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{f(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} &= \int_0^t \left[ \int_0^x \frac{y(s)ds}{(x-s)^\alpha} \right] \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} = \\ &= \int_0^t y(s) \left[ \int_s^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}(x-s)^\alpha} \right] ds. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Заменой переменных  $x = s + (t-s)z$  внутренний интеграл в правой части (7.19) сводится к известному табличному интегралу

$$\int_s^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}(x-s)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dz}{(1-z)^{1-\alpha}z^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

В левой части (7.19) делаем замену переменных  $x = tz$ . Тогда из (7.19) получаем

$$\int_0^1 \frac{f(tz)t^\alpha}{(1-z)^{1-\alpha}} dz = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \int_0^t y(s) ds.$$

Дифференцируя последнее равенство по  $t$ , находим

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{t^\alpha dz}{(1-z)^{1-\alpha}} \left[ z f'(tz) + \frac{\alpha f(tz)}{t} \right] = \\ &= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \cdot t} \int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} [x f'(x) + \alpha f(x)]. \end{aligned}$$

б. Аналогичным образом может быть найдено решение следующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$y(x) = \int_0^x \frac{y(s)ds}{\sqrt{x-s}} + f(x), \quad (7.20)$$

где  $f(x)$  — непрерывно дифференцируемая при  $x \geq 0$  функция.

Умножаем (7.20) на  $(t-x)^{-1/2}$  и интегрируем по  $x$ . Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{y(x)dx}{\sqrt{t-x}} - \int_0^t \frac{f(x)dx}{\sqrt{t-x}} &= \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{t-x}} \int_0^x \frac{y(s)ds}{\sqrt{x-s}} = \\ &= \int_0^t y(s) \left[ \int_s^t \frac{dx}{\sqrt{t-x} \sqrt{x-s}} \right] ds = \pi \int_0^t y(s) ds. \end{aligned}$$

Используя (7.20), заменяем первое слагаемое в левой части этого равенства на  $y - f$ . Дифференцируя полученное соотношение, находим

$$y'(t) - \pi y(t) = \frac{d}{dt} \left( f(t) + \int_0^t \frac{f(x)dx}{\sqrt{t-x}} \right). \quad (7.21)$$

Из (7.20) имеем условие  $y(0) = f(0)$ . Решая уравнение (7.21) с этим начальным условием, получаем решения исходного уравнения (7.20):

$$\begin{aligned} y(t) &= f(0)e^{\pi t} + \int_0^t e^{\pi(t-\tau)} \frac{d}{d\tau} \left( f(\tau) + \int_0^\tau \frac{f(x)dx}{\sqrt{\tau-x}} \right) d\tau = \\ &= f(t) + \int_0^t \frac{f(x)dx}{\sqrt{t-x}} + \pi \int_0^t e^{\pi(t-\tau)} \left( f(\tau) + \int_0^\tau \frac{f(x)dx}{\sqrt{\tau-x}} \right) d\tau. \end{aligned}$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА  
ПЕРВОГО РОДА

## § 24.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА  
ПЕРВОГО РОДА КАК НЕКОРРЕКТНО  
ПОСТАВЛЕННАЯ ЗАДАЧА

**1. Понятие корректно поставленной задачи.** Решение всякой количественной математической задачи обычно заключается в нахождении «решения»  $y$  по заданным «исходным данным»  $f$ . Запишем это в форме  $y = R(f)$ , где  $R$  — некоторый оператор. Будем считать  $y$  и  $f$  элементами метрических пространств  $Y$  и  $F$  с расстояниями между элементами  $\rho_Y(y_1, y_2)$  и  $\rho_F(f_1, f_2)$ .

**Определение.** Решение  $y$  называется устойчивым, если для любого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\epsilon) > 0$ , что из неравенства  $\rho_F(f_1, f_2) \leq \delta(\epsilon)$  следует  $\rho_Y(y_1, y_2) \leq \epsilon$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные элементы  $F$ ,  $y_1 = R(f_1) \in Y$ ,  $y_2 = R(f_2) \in Y$ .

**Определение.** Задача  $y = R(f)$  называется корректно поставленной на паре метрических пространств  $(Y, F)$ , если выполняются условия:

- 1°. Для всякого элемента  $f \in F$  существует решение  $y \in Y$ .
- 2°. Решение определяется однозначно.
- 3°. Решение устойчиво.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются некорректно поставленными.

**Замечание.** Метрики в пространствах  $Y$  и  $F$  характеризуют, в каком смысле понимается малое изменение  $y$  и  $f$ . От того, каким образом выбрана метрика, может зависеть, будет ли решение  $y$  устойчиво при изменении  $f$  или нет, а следовательно, будет ли задача  $y = R(f)$  корректна.

В качестве примера рассмотрим задачу определения производной  $y(x)$  от заданной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ :  $y = \frac{df}{dx}$ . Бу-

дем измерять близость элементов как в пространстве  $Y$ , так и в пространстве  $F$ , в метрике равномерного приближения, т. е.

$$\begin{aligned}\rho_Y(y_1, y_2) &= \sup_{[a, b]} |y_1(x) - y_2(x)|, \\ \rho_F(f_1, f_2) &= \sup_{[a, b]} |f_1(x) - f_2(x)|.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Тогда, очевидно, решение поставленной задачи неустойчиво: малому изменению  $f$  может соответствовать сколь угодно большое изменение  $y$ .

Теперь сохраним в пространстве  $Y$  старую метрику, а для  $f$  введем метрику по-другому. Будем рассматривать  $f(x)$  как элемент пространства  $F_1$  непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций с метрикой  $\rho_F(f_1, f_2) = \max\{\sup_{[a, b]} |f_1(x) - f_2(x)|, \sup_{[a, b]} |f'_1(x) - f'_2(x)|\}$ . Пусть  $y_1 = \frac{df_1}{dx}$ , а  $y_2 = \frac{df_2}{dx}$ . Тогда

$\rho_Y(y_1, y_2) \leq \rho_F(f_1, f_2)$ . Следовательно, малому изменению  $f$  в метрике  $F_1$  соответствует малое изменение  $y$  в метрике  $Y$  и решение поставленной задачи устойчиво.

Таким образом, говоря о корректности или некорректности математической задачи, мы всегда должны указывать, в какой метрике измеряются решение и входные данные. В то же время следует учитывать, что в реальных физических задачах выбор метрики не произволен, а определяется постановкой задачи.

Обратимся снова к рассмотренному выше примеру вычисления производной  $y(x)$  по функции  $f(x)$ . Пусть  $f(x)$  определяется из эксперимента. Тогда в результате погрешности наблюдений будет найдена не „точная“ функция  $f(x)$ , а некоторая приближенная функция  $\bar{f}(x)$ . Не зная  $f$ , по известной точности наблюдений обычно можно оценить отклонение  $\bar{f}$  от  $f$  в метрике (8.1) или в метрике  $\rho(f_1, f_2) =$

$$= \sqrt{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2 dx}, \text{ но невозможно оценить или предпо-}$$

лагать малым отклонение  $\bar{f}$  от  $f$  в метрике  $F_1$ . При этом вопрос устойчивости  $y(x)$  мы должны решать исходя из (8.1). Таким образом, выбор метрики определяется содержанием задачи.

Обратимся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (8.2)$$

Пусть ядро  $K(x, s)$  непрерывно, а  $\lambda$  не является собственным значением ядра. Рассмотрим метрические пространства  $Y$  и  $F$  непрерывных на  $[a, b]$  функций с расстоянием (8.1). В гл. 6 было показано, что решение  $y \in Y$  однозначно определяется из уравнения (8.2) по функции  $f \in F$ . Согласно (6.35)

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds + f(x),$$

где  $R(x, s, \lambda)$  — непрерывная функция. Отсюда видно, что решение поставленной задачи устойчиво — малому изменению  $f(x)$  соответствует малое изменение  $y(x)$  в смысле (8.1).

Таким образом, задача (8.2) является корректно поставленной.

**2. Анализ интегрального уравнения Фредгольма первого рода с точки зрения корректности задачи.** Обратимся к уравнению

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (8.3)$$

Пусть ядро  $K(x, s)$  непрерывно. Будем считать по-прежнему  $y$  и  $f$  элементами пространств непрерывных на  $[a, b]$  функций с метрикой (8.1).

Если ядро  $K(x, s)$  замкнуто (см. § 15), то решение (8.3) единственно. Приведем некоторые соображения, касающиеся существования решения поставленной задачи.

Нетрудно видеть, что непрерывность  $f(x)$ , вообще говоря, не гарантирует существование непрерывного решения. Действительно, пусть функция  $f(x)$  непрерывна, но имеет разрывы производной при некоторых значениях  $x \in (a, b)$ , а ядро  $K(x, s)$  непрерывно дифференцируемо по  $x$ . Тогда при любой непрерывной  $y(x)$  левая часть (8.3) всюду на  $(a, b)$  имеет непрерывную производную, в то время как правая часть имеет непрерывную производную не при всех  $x$ . Следовательно, соотношение (8.3) невыполнимо ни при какой непрерывной функции  $y(x)$ , т. е. непрерывного решения (8.3) не существует.

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких необходимых условиях может существовать непрерывное решение (8.3) в случае, когда  $K(x, s)$  удовлетворяет требованиям (3.2). Из (8.3) следует, что  $f(x)$  является представимой через ядро функцией. Коэффициенты Фурье  $f_n$  и  $y_n$  по системе собственных функций ядра  $K(x, s)$  связаны формулой  $\lambda_n f_n = y_n$  (см. § 10). В силу неравенства Бесселя для  $y(x)$  сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ , а следовательно, и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2$ , т. е. коэффициенты  $f_n$  должны убывать достаточно быстро. Непрерывность  $f(x)$  обеспечивает сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ , следующую из неравенства Бесселя для  $f(x)$ , но, вообще говоря, не обеспечивает сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2$ . Следовательно, решение (8.3) может существовать не при любой непрерывной функции  $f(x)$ , а лишь при такой, для которой сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2$  (напомним, что  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

Обратимся к вопросу об устойчивости. Пусть  $y(x)$  является решением уравнения (8.3). Введем  $z(x) = y(x) + \cos \omega x$ ,



где  $\omega$  — некоторый параметр. Получим уравнение, которому удовлетворяет  $z(x)$  в предположении, что  $K(x, s)$  непрерывно вместе с производной по  $s$ . Имеем из (8.3)

$$\int_a^b K(x, s)[z(s) - \cos \omega s] ds = f(x),$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x, s) z(s) ds &= g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s) \cos \omega s ds = \\ &= f(x) + K(x, s) \frac{\sin \omega s}{\omega} \Big|_a^b - \int_a^b K'_s(x, s) \frac{\sin \omega s}{\omega} ds. \end{aligned}$$

Очевидно,  $\sup_{[a, b]} |f(x) - g(x)| \leq \frac{C}{\omega}$ , где  $C$  — не зависящая от  $\omega$

постоянная. Поэтому при достаточно большом  $\omega$  значение  $\rho_F(f, g) = \sup_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$  как угодно мало. В то же время

$\rho_Y(y, z) = \sup_{[a, b]} |\cos \omega x| = 1$ , т. е. эта величина малой не является.

Отсюда следует важный вывод: решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода неустойчиво относительно возмущения функции  $f(x)$ . Поэтому уравнение (8.3) принадлежит к классу некорректно поставленных задач или, как принято говорить для краткости, является некорректной задачей.

Это свойство уравнения первого рода создает большие трудности при практическом использовании таких уравнений, а между тем целый ряд физических процессов описывается именно такими уравнениями (см. [5]; некоторые физические примеры приведены в гл. 1). Малая погрешность в задании входных данных может столь сильно изменить решение, что оно не будет иметь ничего общего с тем физическим процессом, который описывает уравнение, и даже может привести к тому, что решение просто не будет существовать.

Долгое время считалось, что по этой причине интегральное уравнение Фредгольма первого рода (а также другие некорректные задачи, см. [5]) нецелесообразно использовать для описания физических процессов. Но в последние десятилетия этот взгляд коренным образом изменился, и некорректные задачи стали объектом интенсивного научного исследования.

С общей теорией некорректно поставленных задач можно ознакомиться по книге [5], а мы продолжим изучение интегрального уравнения Фредгольма первого рода и построим

для него так называемый *регуляризирующий алгоритм* А. Н. Тихонова, позволяющий найти функцию, как угодно близкую к точному решению уравнения (8.3).

## § 25.

### СГЛАЖИВАЮЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

**1. Вывод уравнения экстремалей.** Обратимся к уравнению (8.3). Пусть функции, входящие в это уравнение, являются непрерывными, причем  $f(x)$  определена на интервале  $x \in [c, d]$ ,  $y(x)$  при  $x \in [a, b]$ , а ядро  $K(x, s)$  в прямоугольнике  $x \in [c, d]$ ,  $s \in [a, b]$ . Запишем уравнение (8.3) в виде

$$Ay = f, \quad (8.4)$$

где  $A$  — оператор Фредгольма. Рассмотрим функционал

$$M^\alpha[y, f] = N[y, f] + \alpha \Omega[y]. \quad (8.5)$$

где

$$N[y, f] = \int_c^d (Ay - f)^2 dx, \quad (8.6)$$

$$\Omega[y] = \int_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2] dx, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0. \quad (8.7)$$

Здесь  $\alpha > 0$  — некоторый параметр, называемый *параметром регуляризации*. Функционал (8.7) называется регуляризирующим, а функционал  $M^\alpha[y, f]$  — *сглаживающим функционалом*.

В дальнейшем будет показано, что в случае, когда в уравнении (8.3) правая часть задана с погрешностью, в качестве приближенного решения уравнения (8.3) целесообразно выбирать функцию, дающую минимальное значение функционалу  $M^\alpha[y, f]$ , где  $f$  — приближенное значение правой части (8.3). Поэтому займемся исследованием свойств функционала  $M^\alpha[y, f]$ .

Поставим вариационную задачу на экстремум функционала  $M^\alpha[y, f]$ . Экстремум будем искать в классе  $Y$  функций  $y(x)$ , дважды непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих условиям

$$y'(a) = y'(b) = 0. \quad (8.8)$$

Пусть  $y(x)$  и  $y(x) + \delta y(x)$  — две функции, принадлежащие  $Y$ . Вычислим приращение функционала  $M^\alpha$ , отвечающее приращению  $\delta y$ , т. е. вычислим величину  $M^\alpha[y + \delta y, f] - M^\alpha[y, f]$ .

Имеем

$$\begin{aligned}
 M^{\alpha}[y + \delta y, f] &= \int_c^d [A(y + \delta y) - f]^2 dx + \alpha \int_a^b [p(y' + \delta y')^2 + \\
 &+ q(y + \delta y)^2] dx = \int_c^d [Ay + A\delta y - f]^2 dx + \alpha \int_a^b [p(y' + \delta y')^2 + \\
 &+ q(y + \delta y)^2] dx = \int_c^d (Ay - f)^2 dx + 2 \int_c^d (Ay - f)A\delta y dx + \\
 &+ \int_c^d (A\delta y)^2 dx + \alpha \int_a^b [py'^2 + qy^2] dx + 2\alpha \int_a^b (py'\delta y' + qy\delta y) dx + \\
 &+ \int_a^b [p(\delta y')^2 + q\delta y^2] dx.
 \end{aligned}$$

В этом выражении сумма первого и четвертого слагаемых представляет собой  $M^{\alpha}[y, f]$ . Перенесем их влево и тогда получим, что приращение функционала  $M^{\alpha}[y + \delta y, f] - M^{\alpha}[y, f]$  распадается на линейную относительно  $\delta y$  часть (это сумма второго и пятого слагаемых), называемую вариацией функционала и обозначаемую  $\delta M^{\alpha}$ , и сумму третьего и шестого слагаемых, зависящую от  $\delta y$  нелинейно, которую обозначим  $R[\delta y]$  и которая, как нетрудно видеть, при любом  $\delta y(x)$  отрицательна:

$$M^{\alpha}[y + \delta y, f] - M^{\alpha}[y, f] = \delta M^{\alpha} + R[\delta y]. \quad (8.9)$$

Из вариационного исчисления известно, что если  $y(x)$  реализует экстремум функционала  $M^{\alpha}$ , то  $\delta M^{\alpha} = 0$ , т. е.

$$\int_c^d (Ay - f)A\delta y dx + \alpha \int_a^b (py'\delta y' + qy\delta y) dx = 0. \quad (8.10)$$

Это равенство представляет собой необходимое условие экстремума. Преобразуем первое слагаемое, изменив порядок интегрирования:

$$\begin{aligned}
 &\int_c^d \left\{ \left[ \int_a^b K(x, s)y(s)ds - f(x) \right] \int_a^b K(x, t)\delta y(t) dt \right\} dx = \\
 &= \int_a^b \delta y(t) dt \int_c^d \left[ \int_a^b K(x, s) K(x, t) y(s) ds \right] dx - \\
 &- \int_a^b \delta y(t) dt \int_c^d K(x, t)f(x) dx = \int_a^b \delta y(t) \left[ \int_a^b \hat{K}(s, t) y(s) ds - \right. \\
 &\quad \left. - \hat{f}(t) \right] dt,
 \end{aligned}$$

где

$$\hat{K}(s, t) = \int_c^d K(x, s) K(x, t) dx,$$

$$\hat{f}(t) = \int_c^d K(x, t) f(x) dx.$$

Во втором слагаемом в (8.10) произведем интегрирование по частям. Получим

$$\begin{aligned} \int_a^b (py' \delta y' + qy \delta y) dx &= py' \delta y \Big|_a^b + \int_a^b (qy - (py')') \delta y \cdot dx = \\ &= \int_a^b (qy - (py')') \delta y dx, \end{aligned}$$

так как внеинтегральный член в силу (8.8) обращается в нуль. Соотношение (8.10) принимает тогда вид

$$\int_a^b \delta y(t) \left\{ \int_a^b \hat{K}(s, t) y(s) ds - \hat{f}(t) + \alpha \left( qy - \frac{d}{dt} (py') \right) \right\} dt = 0. \quad (8.11)$$

Поскольку  $\delta y(t)$  — произвольная вариация, то в силу основной леммы вариационного исчисления выражение в  $\{ \}$  равно нулю. Получаем уравнение, определяющее экстремали функционала  $M^\alpha$ :

$$\frac{d}{dt} (p(t)y'(t)) - q(t)y(t) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b \hat{K}(s, t) y(s) ds - \frac{1}{\alpha} \hat{f}(t). \quad (8.12)$$

Таким образом, если  $y(x) \in Y$  осуществляет экстремум функционала  $M^\alpha$  при условиях (8.8), то  $y$  удовлетворяет уравнению (8.12).

**2. Исследование уравнения экстремалей. Теорема о минимальном значении сглаживающего функционала.** Докажем, что уравнение (8.12) при красвых условиях (8.8) имеет единственное решение. Уравнение (8.12) является интегро-дифференциальным уравнением. Сведем его к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt} (py') - qy = 0 \quad (8.13)$$

при условиях (8.8). Убедимся, что эта задача имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть  $y(t)$  имеет положительное максимальное значение, достигающееся в некоторой точке  $t_0 \in [a, b]$ . Тогда  $y(t_0) > 0$ ,  $y'(t_0) = 0$ ,  $y''(t_0) \leq 0$ . Учти-

ывая, что  $p(t_0) > 0$ ,  $q(t_0) > 0$ , имеем  $\frac{d}{dt}(py') - qu = py'' - qu < 0$

при  $t = t_0$ , что противоречит равенству (8.13). Следовательно,  $\sup_{[a, b]} y(t) \leq 0$ . Аналогично доказывается, что  $\inf_{[a, b]} y(t) \geq 0$ . Отсюда следует, что  $y(t) \equiv 0$ .

В силу доказанного существует функция Грина  $G(t, \xi)$  и уравнение (8.12) при условиях (8.8) эквивалентно интегральному уравнению

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t, \xi) \left[ \int_a^b \hat{K}(s, \xi) y(s) ds - \hat{f}(\xi) \right] d\xi,$$

или

$$y(t) = \int_a^b T(t, s) y(s) ds - F(t), \quad (8.14)$$

где

$$T(t, s) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t, \xi) \hat{K}(s, \xi) d\xi$$

— некоторое ядро, а

$$F(t) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Уравнение (8.14) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Докажем, что оно имеет единственное решение. Для этого согласно теореме 6.5 достаточно доказать, что соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. А это эквивалентно тому, что однородное уравнение (8.12) при условиях (8.8) имеет только тривиальное решение. Допустим противное, т. е. что уравнение

$$\alpha \left( \frac{d}{dt}(py') - qu \right) = \int_a^b \hat{K}(s, t) y(s) ds \quad (8.15)$$

имеет нетривиальное решение  $y(t)$ . Умножая (8.15) на  $y(t)$  и интегрируя, получим

$$\alpha \int_a^b \left( y \frac{d}{dt}(py') - qy^2 \right) dt = \int_a^b y(t) dt \int_a^b \hat{K}(s, t) y(s) ds. \quad (8.16)$$

Интегрированием по частям преобразуем левую часть к виду  $-\alpha \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] dt$ . Правую часть преобразуем, пользуясь выражением (8.11) для  $\hat{K}(s, t)$  и изменяя порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_a^b y(t) dt \int_a^b y(s) ds \int_c^d K(x, s) K(x, t) dx &= \int_c^d dx \int_a^b K(x, s) y(s) ds \times \\ &\times \int_a^b K(x, t) y(t) dt = \int_c^d dx \left[ \int_a^b K(x, t) y(t) dt \right]^2. \end{aligned}$$

После этих преобразований (8.16) принимает вид

$$-\alpha \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] dt = \int_c^d dx \left[ \int_a^b K(x, t) y(t) dt \right]^2.$$

Так как  $y(t) \not\equiv 0$ , то левая часть отрицательна, а правая неотрицательна, и мы имеем противоречие, доказывающее, что задача (8.15), (8.8) имеет только тривиальное решение, а следовательно, уравнение (8.14) (или задача (8.12), (8.8)) имеет единственное решение.

Нетрудно видеть, что это решение реализует минимальное значение функционала  $M^\alpha[y, f]$ . Это непосредственно следует из (8.9), поскольку  $\delta M^\alpha = 0$  при  $y = y(x)$ , а  $R[\delta y] \geq 0$  при любом  $\delta y(x)$ . Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 8.1.** Для любой непрерывной функции  $f(x)$  существует единственная функция  $y(x)$  из класса  $Y$ , на которой реализуется минимальное значение функционала  $M^\alpha[y, f]$ .

## § 26.

### ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

В настоящем параграфе показано, что функция  $y^\alpha(x)$ , реализующая минимальное значение функционала  $M^\alpha[y, g]$ , приближает решение  $y(x)$  некорректно поставленной задачи (8.3) с любой степенью точности, если только функция  $g(x)$  с достаточной степенью точности приближает  $f(x)$ .

**1. Всюмогательная теорема.** Сначала докажем вспомогательную теорему из функционального анализа.

Пусть имеются два метрических пространства:  $Y$  (с элементами  $y$ ) и  $F$  (с элементами  $f$ ).

Пусть определен оператор  $A$ , который каждому элементу  $y \in Y$  ставит в соответствие элемент  $f \in F$ :  $f = Ay$  и од-

новременно однозначно определен обратный оператор  $A^{-1}$ , т. е. закон соответствия  $y = A^{-1}f$ .

**Замечание.** Обратный оператор определен, вообще говоря, не на всем множестве  $F$ , а лишь на его части, на подмножестве  $\bar{F}$  элементы которого определяются по закону  $\bar{f} = Ay$ ,  $y \in Y$ .

**Определение.** Последовательность  $y_n \in Y$  называется сходящейся в метрике пространства  $Y$  к некоторому элементу  $y \in Y$ , если  $\rho_Y(y_n, y) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение.** Последовательность  $y_n \in Y$  называется компактной в  $Y$ , если из каждого бесконечного подмножества ее элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу  $y \in Y$ .

**Определение.** Оператор  $A$ , переводящий элемент  $y \in Y$  в элемент  $\bar{f} \in F$ , называется непрерывным, если какова бы ни была последовательность  $y_n$ , сходящаяся в  $Y$  к  $y$ , соответствующая последовательность  $\bar{f}_n = Ay_n$  сходится в  $F$  к  $\bar{f} = Ay$ .

Обратим внимание на то, что все эти определения строятся по типу определенных гл. 2.

**Теорема 8.2.** Пусть в пространстве  $Y$  имеется последовательность  $y_n$ , которой в пространстве  $F$  отвечает последовательность  $\bar{f}_n = Ay_n$ . Пусть  $\bar{f}_n \rightarrow \bar{f} \in F$ ,  $A$  является непрерывным оператором, а последовательность  $y_n$  является компактной. Тогда  $y_n \rightarrow y = A^{-1}\bar{f}$ .

Доказательство проведем от противного. Пусть  $y_n \not\rightarrow y = A^{-1}\bar{f}$ . Тогда найдется  $\varepsilon > 0$  и такая подпоследовательность  $y_{n_k}$ , для которой справедливо неравенство

$$\rho_Y(y_{n_k}, y) > \varepsilon, \quad (8.17)$$

в то время как подпоследовательность  $\bar{f}_{n_k} \rightarrow \bar{f}$ . Но последовательность  $y_n$  является компактной и поэтому из  $y_{n_k}$  можно выбрать еще одну подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $\bar{y} \in Y$ . Перенумеруем и обозначим эту подпоследовательность через  $y_n$ . Имеем

$$y_n \rightarrow \bar{y}. \quad (8.18)$$

В силу непрерывности оператора  $A$  получим тогда  $\bar{f}_n = Ay_n \rightarrow Ay = \bar{f}$ , т. е.  $\bar{f} = f$ . Отсюда в силу однозначности обратного оператора получим  $\bar{y} = y$ . Тогда (8.18) означает, что  $y_n \rightarrow y$ , т. е.

$$\rho_Y(y_n, y) < \varepsilon/2$$

при  $n > N(\varepsilon)$ . Но согласно (8.17)

$$\rho_Y(y_n, y) > \varepsilon$$

для  $\forall n$  ( $y_n$  является подпоследовательностью  $y_{n_k}$ ). Полученное противоречие доказывает теорему.

**2. Алгоритм построения приближенного решения.** Будем считать, что решение задачи (8.3) существует при некоторой фиксированной функции  $f(x)$ , и обозначим его  $y(x)$ . Ядро  $K(x, s)$  будем считать непрерывным и замкнутым, что обеспечивает единственность решения, как уже отмечалось в § 24.

Пользуясь теоремой 8.2, построим последовательность функций, позволяющую получить с любой степенью точности решение  $y(x)$  некорректной задачи (8.3) по приближенно заданной функции  $f(x)$ .

Приближенное задание функции  $f(x)$  будем понимать как задание последовательности  $g_n(x)$  непрерывных на  $[c, d]$

функций, таких, что  $\int_c^d [f(x) - g_n(x)]^2 dx \leq \delta_n^2$ , где  $\delta_n \rightarrow 0$  — не-

которая числовая последовательность. Таким образом,  $g_n(x)$  аппроксимирует  $f(x)$  даже не обязательно равномерно, а в смысле среднего квадратичного.

Алгоритм построения приближенного решения уравнения (8.3) по заданной последовательности  $g_n(x)$  состоит в том, что выбирается некоторая числовая последовательность  $\alpha_n = \gamma \delta_n^2$ , где  $\gamma$  — не зависящая от  $n$  постоянная, и для каждого  $\alpha_n$  находится функция  $y^{\alpha_n}(x)$ , реализующая минимальное значение сглаживающего функционала  $M^{\alpha_n}[y, g_n]$ . В § 25 мы обозначали функцию, реализующую минимальное значение сглаживающего функционала через  $y(x)$ , опуская значок  $\alpha_n$ , хотя фактически  $y$  зависит от  $\alpha_n$ . Так как теперь мы специально интересуемся зависимостью  $y$  от  $\alpha$ , то будем эту зависимость указывать верхним индексом, что уже и сделали, написав  $y^{\alpha_n}(x)$ . Равенство  $\alpha_n = \gamma \delta_n^2$  означает, что параметр регуляризации  $\alpha_n$  согласован с точностью  $\delta_n$  задания  $g_n$ .

Оказывается, при достаточно большом  $n$  функция  $y^{\alpha_n}(x)$  обеспечивает равномерное приближение к  $y(x)$  с произвольной степенью точности, что можно выразить следующей теоремой:

**Теорема 8.3.** Пусть  $y(x)$  — решение уравнения (8.3). Пусть  $g_n(x)$  — последовательность непрерывных функций, являющихся приближениями для  $f(x)$  так, что

$$\int_c^d [f(x) - g_n(x)]^2 dx \leq \delta_n^2,$$

где  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть функция  $y^{\alpha_n}(x)$  реализует минимальное значение сглаживающего функционала  $M^{\alpha_n}[y, g_n]$ , где  $\alpha_n = \gamma \delta_n^2$  ( $\gamma = \text{const}$  не зависит от  $n$ .) Тогда для  $\forall \varepsilon > 0$  найдется  $N(\varepsilon)$  такое, что при  $n > N(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\sup_{[a, b]} |y(x) - y^{\alpha_n}(x)| < \varepsilon. \quad (8.19)$$



**Доказательство.** Воспользуемся теоремой 8.2. Рассмотрим два конкретных пространства  $Y$  и  $F$ . В пространстве  $F$ , элементами которого являются непрерывные на  $[c, d]$  функции, определим расстояние следующим образом:

$$\rho_F(f_1, f_2) = \sqrt{\int_c^d [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx}, \text{ т. е. } \rho_F(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — норма, введенная в пространстве  $h[c, d]$ , рассмотренном в § 4. В пространстве  $Y$ , элементами которого также являются непрерывные на  $[a, b]$  функции, расстояние определим как

$$\rho_Y(y_1, y_2) = \sup_{[a, b]} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Построим последовательность  $y_n(x)$  (или для простоты записи обозначим ее  $y_n$ ), указанную в формулировке теоремы. Ей отвечает последовательность  $f_n = Ay_n$ . Поскольку ядро  $K$  замкнуто, то отображение последовательности  $y_n$  на  $f_n$  взаимно однозначно. Чтобы сделать заключение о том, что  $\rho_Y(y, y_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (это означает выполнение (8.19)), надо согласно теореме 8.2 убедиться, что:

- 1°. Оператор  $A$  является непрерывным в смысле определения, данного в настоящем параграфе.
- 2°.  $f_n \rightarrow f$ , т. е.  $\rho_F(f_n, f) \rightarrow 0$ .
- 3°. Последовательность  $y_n$  компактна.

Убедимся в справедливости 1°. Действительно, пусть последовательность  $u_n$  сходится к  $u$  в метрике пространства  $Y$ , т. е. сходится равномерно. Тогда  $u_n$  сходится к  $u$  и в среднем. Такую последовательность  $u_n$  (как было показано в § 4) оператор Фредгольма  $A$  с непрерывным ядром  $K(x, s)$  переводит в последовательность  $Au_n$ , сходящуюся в метрике пространства  $F$  к  $Au$ . Это означает непрерывность оператора  $A$ , осуществляющего отображение элементов метрического пространства  $Y$  на элементы метрического пространства  $F$ .

Для того чтобы убедиться в справедливости 2° и 3°, докажем два вспомогательных неравенства. Поскольку  $y_n$  реализует минимальное значение функционала  $M^{\alpha n}[y, g_n]$ , то

$$M^{\alpha n}[y_n, g_n] \leq M^{\alpha n}[y, g_n],$$

где  $y$  есть решение уравнения (8.3), т. е.

$$\begin{aligned}
N[y_n, g_n] + \alpha_n \Omega[y_n] &\leq N[y, g_n] + \alpha_n \Omega[y] = \\
= \int_c^d (Ay - g_n)^2 dx + \alpha_n \Omega[y] &= \int_c^d (f - g_n)^2 dx + \alpha_n C \leq \\
&\leq \delta_n^2 + \alpha_n C \leq \left( \frac{1}{\gamma} + C \right) \alpha_n,
\end{aligned}$$

где  $C > 0$  — постоянная, равная  $\Omega[y]$ . Итак,

$$N[y_n, g_n] + \alpha_n \Omega[y_n] \leq \alpha_n \left( \frac{1}{\gamma} + C \right) = \alpha_n D.$$

Поскольку оба функционала в левой части не отрицательны, то каждый из них в отдельности не превосходит постоянной, написанной в правой части, и, следовательно,

$$N[y_n, g_n] \leq \alpha_n D, \quad (8.20)$$

$$\Omega[y_n] \leq D. \quad (8.21)$$

Это и есть требуемые вспомогательные неравенства.

Докажем теперь 2°. Имеем согласно неравенству треугольника

$$\begin{aligned}
\rho_F(f, f_n) &\leq \rho_F(f, g_n) + \rho_F(g_n, f_n) = \left[ \int_c^d (f_n - g_n)^2 dx \right]^{1/2} + \\
&+ \left[ \int_c^d (g_n - f)^2 dx \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равно

$$\left[ \int_c^d (Ay_n - g_n)^2 dx \right]^{1/2} = [N[y_n, g_n]]^{1/2} \leq \sqrt{\alpha_n} \sqrt{D} = \delta_n \sqrt{\gamma D},$$

согласно (8.18). Второе слагаемое

$$\left[ \int_c^d (g_n - f)^2 dx \right]^{1/2} \leq \delta_n$$

согласно условию теоремы 8.3. Поэтому  $\rho_F(f_n, f) \leq \delta_n(1 + \sqrt{\gamma D})$ , откуда следует, что  $\rho_F(f_n, f) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $f_n \rightarrow f$ .

Докажем 3°. Для доказательства компактности последовательности  $y_n(x)$  нужно убедиться, что из любого бесконечного подмножества ее элементов можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность (сходимость в  $U$  означает равномерную сходимость). Для этого согласно

теореме Арцела [14] достаточно доказать, что любая подпоследовательность  $y_n(x)$  равномерно ограничена и равномерно-непрерывна.

Неравенство (8.21) означает, что  $\int_a^b [p(y'_n)^2 + qy_n^2] dx \leq D$ , а тогда в отдельности

$$\int_a^b p(y'_n)^2 dx \leq D, \quad \int_a^b qy_n^2 dx \leq D. \quad (8.22)$$

Так как  $p(x) > 0$  по условию, то  $p_0 = \inf_{[a, b]} p(x) > 0$  и, следовательно,

$$p_0 \int_a^b (y'_n)^2 dx \leq D, \quad \text{т. е.} \quad \int_a^b (y'_n)^2 dx \leq \frac{D}{p_0} = D_1.$$

Рассмотрим  $y_n(x_2) - y_n(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y'_n(x) dx$ . Применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |y_n(x_2) - y_n(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} y'_n dx \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} (y'_n)^2 dx} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} 1 dx} \leq \sqrt{D_1} \sqrt{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность  $y_n(x)$  равномерно-непрерывна.

Докажем равномерную ограниченность последовательности  $y_n(x)$ . Для этого воспользуемся вторым из неравенств (8.22). Имеем:  $\int_a^b y_n^2(x) dx \leq \frac{D}{q_0}$ , где  $q_0 = \inf_{[a, b]} q(x) > 0$ . Отсюда найдется точка  $\xi_n \in [a, b]$  такая, что  $y_n^2(\xi_n) \leq \frac{D}{q_0(b-a)}$ . При этом равномерно по  $x$  и  $n$  будет выполнено

$$|y_n(x)| \leq |y_n(\xi_n)| + |y_n(x) - y_n(\xi_n)| \leq \sqrt{\frac{D}{q_0(b-a)}} + \sqrt{D_1(b-a)}.$$

Итак, последовательность  $y_n(x)$  равномерно ограничена и равномерно-непрерывна. В силу теоремы Арцела отсюда следует компактность последовательности  $y_n(x)$ . Тем самым доказано свойство 3°, а вместе с ним и вся теорема 8.3.

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Настоящая глава носит справочный характер и изложение материала не претендует на обоснование всех утверждений. Это определяется стремлением авторов не загромождать пособие специальными вопросами. Более подробное изложение затронутых в главе вопросов можно найти в [2, 6, 8, 10, 16, 21].

## § 27.

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

При численном решении интегральных уравнений второго рода задачу сводят к решению системы алгебраических уравнений. Рассмотрим основные случаи.

1. **Замена ядра вырожденным.** Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (9.1)$$

Как было показано в гл. 6, в случае вырожденного ядра уравнение (9.1) эквивалентно системе алгебраических уравнений (6.25). Решая эту систему, находим коэффициенты  $C_n$  и из (6.23) — функцию  $y(x)$ .

В случае невырожденного ядра можно искать приближенное решение уравнения (9.1), заменяя в (9.1) ядро  $K(x, s)$  на близкое вырожденное ядро  $\tilde{K}(x, s)$ . В качестве  $\tilde{K}(x, s)$  можно выбрать, например, частичную сумму ряда Фурье ядра  $K(x, s)$  по некоторой системе ортонормированных функций  $\{\varphi_n(x)\}$ :

$$\tilde{K}(x, s) = \sum_{n=1}^N \omega_n(s)\varphi_n(x), \quad \text{где} \quad \omega_n(s) = \int_a^b K(x, s)\varphi_n(x)dx.$$

Если ядро  $K(x, s)$  является аналитической функцией  $s$ , то приближенное ядро  $\tilde{K}(x, s)$  можно искать в виде отрезка степенного ряда

$$\tilde{K}(x, s) = \sum_{n=0}^N C_n(x)(s-d)^n, \quad \text{где} \quad d \in [a, b],$$

$$C_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial s^n} K(x, s) \Big|_{s=d}.$$

Можно показать, что в случае, когда  $\lambda$  не совпадает с собственным значением ядра  $K(x, s)$ , решение уравнения может быть сколь угодно точно приближено решением уравнения с ядром  $\tilde{K}(x, s)$  при условии достаточно малой разности  $|K(x, s) - \tilde{K}(x, s)|$ .

**Пример.** Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) = \int_0^1 x \sin(xs) y(s) ds + \cos x.$$

Найдем его приближенное решение, заменив ядро  $K(x, s) = x \sin(xs)$  на близкое вырожденное ядро  $\tilde{K}(x, s)$ .

а. В качестве такого вырожденного ядра выберем  $\tilde{K}^{(1)}(x, s) = x \left[ xs - \frac{1}{6} x^3 s^3 \right]$ . Соответствующее приближенное решение обозначим  $y^{(1)}(x)$ . Имеем

$$y^{(1)}(x) = \int_0^1 x^2 \left( s - \frac{1}{6} x^2 s^3 \right) y^{(1)}(x) ds + \cos x.$$

Ищем  $y^{(1)}(x)$  в виде  $y^{(1)}(x) = \cos x + ax^2 + bx^4$ . Получаем

$$\begin{aligned} \cos x + ax^2 + bx^4 = \int_0^1 x^2 \left( s - \frac{1}{6} x^2 s^3 \right) (\cos s + \\ + as^2 + bs^4) ds + \cos x. \end{aligned}$$

Приравнявая слагаемые при  $x^2$  и  $x^4$ , имеем

$$a = \int_0^1 s(\cos s + as^2 + bs^4) ds = \cos 1 - 1 + \sin 1 + \frac{a}{4} + \frac{b}{5},$$

$$\begin{aligned} b = \int_0^1 \left( -\frac{1}{6} \right) s^3 (\cos s + as^2 + bs^4) ds = \\ = -\frac{1}{6} \left[ 6 - 3 \cos 1 - 5 \sin 1 + \frac{a}{6} + \frac{b}{8} \right]. \end{aligned}$$

Решая полученную систему двух алгебраических уравнений, находим  $a \approx 0,4742$ ,  $b \approx -0,1569$ . Таким образом  $y^{(1)}(x) = \cos x + 0,4742x^2 - 0,1569x^4$ . Точным решением исходного интегрального уравнения, как можно непосредственно проверить, является функция  $y(x) \equiv 1$ . На отрезке  $[0, 1]$  максимальное отклонение  $y^{(1)}(x)$  от  $y(x)$  составляет 0,14.

б. Аппроксимируем ядро  $K(x, s)$  более точно, чем в первом случае, а именно возьмем ядро  $\tilde{K}^{(2)}(x, s) = x \left[ xs - \frac{x^3 s^3}{6} + \frac{x^5 s^5}{120} \right]$ . Тогда ищем приближенное решение в виде  $y^{(2)}(x) =$

$= \cos x + ax^3 + bx^4 + cx^6$ . Пропедев выкладки, аналогичные вышеприведенным, находим

$$y_2(x) = \cos x + x^2 \cdot 0,5076 - x^4 \cdot 1,41 \cdot 10^{-2} + x^6 \cdot 3,562 \cdot 10^{-4}.$$

Максимальное отклонение  $y^{(1)}(x)$  от точного решения  $y(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  составляет величину 0,034, т. е. погрешность вычислений примерно в 5 раз меньше, чем в первом случае.

Аналогичным образом можно действовать в задаче на собственные значения для однородного уравнения (9.1). Замена невырожденного ядра  $K(x, s)$  на близкое вырожденное ядро  $\tilde{K}(x, s)$  позволяет свести интегральное уравнение к системе однородных алгебраических уравнений (3.20) с последующим определением собственных значений матрицы  $N$ -го порядка.

**2. Метод квадратур.** Пусть требуется решить уравнение (9.1). На сегменте  $[a, b]$  вводим сетку с узлами  $x_i (i = 1, \dots, N)$  так, что  $x_0 = a, x_N = b$ . Интеграл  $\int_a^b F(x, s) ds$  при любом значении  $x$  будем аппроксимировать какой-нибудь квадратурной формулой — формулой трапеций, Симпсона или формулой более высокого порядка точности. Получаем

$$\int_a^b F(x, s) ds = \sum_{n=0}^N \beta_n F(x, x_n) + R, \quad (9.2)$$

где  $\beta_n$  — весовые множители, а  $R$  — погрешность аппроксимации интеграла суммой. Для формул трапеций и Симпсона сетка выбирается равномерной, ее шаг  $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{N}$ . В случае формулы трапеций  $\beta_0 = \beta_N = \frac{h}{2}, \beta_n = h (n = 1, \dots, N-1)$ ;

при аппроксимации интеграла по методу Симпсона  $N$  — четно,  $\beta_0 = \beta_N = \frac{h}{6}, \beta_{2n} = \frac{h}{3}, \beta_{2n+1} = \frac{2}{3}h (n = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1)$ .

Используя соотношение (9.2) при значениях  $x = x_m (m = 0, \dots, N)$ , имеем из (9.1):

$$y(x_m) = \lambda \sum_{n=0}^N \beta_n K(x_m, x_n) y(x_n) + f(x_m) + \lambda R. \quad (9.3)$$

Положим в этих уравнениях  $R = 0$ . Обозначим  $K(x_m, x_n) = K_{mn}$ , а  $f(x_m) = f_m$ . Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $y_m$ :

$$y_m = \lambda \sum_{n=0}^N \beta_n K_{mn} y_n + f_m \quad (m = 0, 1, \dots, N). \quad (9.4)$$

Эта система представляет собой разностную схему, отвечающую уравнению (9.1). Ее решение принимается за численное решение интегрального уравнения (9.1) в точках  $x = x_m$ .

Значения  $y_m$  определяются из (9.4) при помощи какого-либо метода численного решения системы алгебраических уравнений, например метода исключения Гаусса. Величина  $N$  выбирается исходя из возможности решения системы уравнений (9.4) на ЭВМ. Обычно приходится ограничиваться небольшим  $N$ , поэтому для получения малой погрешности целесообразно выбирать квадратурные формулы высокого порядка точности, например формулы Гаусса — Кристоффеля.

Для однородного интегрального уравнения (9.1) имеем разностную схему

$$y_m = \lambda \sum_{n=0}^N \beta_n K_{mn} y_n. \quad (9.5)$$

Из этой системы могут быть определены собственные значения  $\lambda_i^N$  матрицы  $\{\beta_n K_{mn}\}$ , которые являются приближениями к первым собственным значениям  $\lambda_i$  ядра  $K(x, s)$ .

Пусть решение уравнения (9.1), а также ядро и неоднородность в этом уравнении — достаточно гладкие функции, и квадратурные формулы имеют порядок аппроксимации  $O(h^p)$ . Если значение  $\lambda$  в (9.1) не является близким к собственным значениям  $\lambda_i$  ядра  $K(x, s)$ , то при уменьшении шага сетки  $h$  решение  $y_m$  системы (9.4) ведет себя устойчиво и будет отличаться от точного решения интегрального уравнения в узлах сетки на величину  $O(h^p)$ .

Если же  $\lambda \approx \lambda_i$ , то малые изменения схемы или изменение шага  $h$  могут привести к существенному изменению решения, т. е. система (9.4) становится, как принято говорить, плохо обусловленной.

Методом квадратур можно решать и уравнения Вольтерра второго рода. Будем рассматривать уравнение Вольтерра как уравнение Фредгольма, в котором  $K(x, s) \equiv 0$  при  $s > x$ . Тогда разностная схема для уравнения Вольтерра имеет вид

$$y_m = \sum_{n=0}^m \beta_n K_{mn} y_n + f_m \quad (m = 0, 1, \dots, N). \quad (9.6)$$

Поскольку матрица системы (9.6) является треугольной, то для решения этой системы на ЭВМ путем последовательного определения  $y_m$  требуется меньший объем вычислений и соответственно значение  $N$  можно выбрать значительно большим, чем в случае уравнения Фредгольма.

**3. Метод последовательных приближений.** Для численного решения интегральных уравнений в ряде случаев це-

лесообразно применять метод последовательных приближений. Этот метод может быть легко реализован, если интегралы заменить квадратурными формулами и определять значения решения в узлах сетки.

Как видно из изложенного в предшествующих главах, метод последовательных приближений может использоваться в следующих случаях:

а. Решение уравнения Вольтерра

$$y(x) = \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x),$$

как показано в гл. 7, является пределом равномерно сходящейся последовательности приближений, определяемых соотношением (7.2).

б. Из § 17 следует, что последовательными приближениями может быть найдено решение неоднородного уравнения Фредгольма (9.1) при  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ , где  $M = \sup |K(x, s)|$ .

в. В § 8 приведен метод последовательных приближений Келлога для решения задачи на собственные значения и собственные функции для однородного уравнения Фредгольма второго рода.

## § 28.

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрим уравнение

$$Ay = \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x) \quad (c \leq x \leq d) \quad (9.7)$$

с замкнутым ядром  $K(x, s)$ . Как было показано в главе 8, уравнение Фредгольма первого рода является некорректно поставленной задачей. Малые возмущения функции  $f(x)$ , неизбежные, например, при экспериментальном определении этой функции или даже при округлении чисел в процессе счета на ЭВМ, могут приводить к существенным изменениям функции  $y(x)$  или к тому, что решения уравнения вообще не существует. В гл. 8 было показано, что в этом случае следует использовать методы регуляризации. Разобранный в гл. 8 метод регуляризации рекомендует в качестве приближенного решения использовать функцию  $y^\alpha(x)$ , реализующую минимальное значение сглаживающего функционала



$$M^\alpha[y, f] = \int_c^d \left[ \int_a^b K(x, s) y(s) ds - f(x) \right]^2 dx + \\ + \alpha \int_a^b (p(s)(y'(s))^2 + q(s)y^2(s)) ds. \quad (9.8)$$

При применении метода регуляризации возникают два вопроса: как выбрать параметр регуляризации  $\alpha$  и как находить  $y^\alpha(x)$  при заданном  $\alpha$ ?

1. **Определение  $y^\alpha(x)$  при заданном  $\alpha$ .** При фиксированном значении  $\alpha$  функция  $y^\alpha(x)$  может быть определена двумя способами:

а) методами минимизации функционала  $M^\alpha[y, f]$ , например методом скорейшего спуска, методом сопряженных градиентов и др. [24];

б) решением краевой интегро-дифференциальной задачи (8.12), определяющей экстремали функционала (9.8).

**Замечание.** Если на функцию  $y(x)$  в задаче (9.7) накладываются дополнительные ограничения, например требование, чтобы  $y(x)$  не выходило за пределы определенной области, то применяется лишь первый способ.

Задачу (9.8), вообще говоря, приходится решать приближенно с использованием конечно-разностной аппроксимации. Мы рассмотрим простейший случай  $p = q = 1$ . Вводим равномерную сетку по  $x$  и по  $s$ . Узлы сетки по  $x$ :  $x_0 = c, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = d$ . Узлы сетки по  $s$ :  $s_0 = a, s_1, \dots, s_{L-1}, s_L = b$ . Шаг сетки по  $x$  равен  $h_x = \frac{d-c}{N}$ , шаг сетки по  $S$  равен  $h_s = \frac{b-a}{L}$ . Тогда функционалу  $M^\alpha$  будет соответствовать сумма

$$\overline{M} = \sum_{n=0}^N \gamma_n \left[ \sum_{l=0}^L \beta_l K_{nl} y_l - f_n \right]^2 + \alpha \left[ \sum_{l=0}^L \beta_l y_l^2 + \right. \\ \left. + \sum_{l=0}^{L-1} \left( \frac{y_{l+1} - y_l}{h_s} \right)^2 h_s \right], \quad (9.9)$$

где  $\gamma_0 = \gamma_N = \frac{h_x}{2}$ ,  $\beta_0 = \beta_L = \frac{h_s}{2}$ ,  $\beta_l = h_x$  ( $l = 1, \dots, L-1$ ),  $\gamma_n = h_s$  ( $n = 1, \dots, N-1$ ). Величина  $\overline{M}$  зависит от выбора  $y_l$ :  $\overline{M} = \overline{M}(y_1, \dots, y_L)$ . Минимальное значение  $\overline{M}$  достигается при  $y_l$ , определяемых из условия

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y_l} = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, L). \quad (9.10)$$

Для удобства записи введем два числа  $y_{-1}$  и  $y_{L+1}$ , считая  $y_{-1}=y_0$ , а  $y_{L+1}=y_L$ . Тогда, вычисляя производные  $\frac{\partial \bar{M}}{\partial y_l}$  из (9.9) и приравнявая их согласно (9.10) нулю, получаем

$$\begin{cases} \alpha \left\{ \frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{h_s^2} - y_l \right\} = \sum_{r=0}^L \vartheta_r \hat{K}_{lr} y_r - \hat{g}_l \quad (l=0, 1, \dots, L), \\ \frac{y_0 - y_1}{h_s} = 0, \quad \frac{y_{L+1} - y_L}{h_s} = 0, \end{cases} \quad (9.11)$$

где

$$\hat{K}_{lr} = \sum_{n=0}^N \gamma_n K_{nl} K_{nr}, \quad \hat{g}_l = \sum_{n=0}^N \gamma_n K_{ln} f_n.$$

Полученная задача (9.11) представляет собой разностную схему, соответствующую задаче (8.12), (8.8). Эта схема имеет порядок аппроксимации  $O(h_s^2 + h_x^2)$ . Соотношения (9.11) являются системой алгебраических уравнений и могут быть решены, например, методом исключения Гаусса.

**2. Выбор параметра регуляризации  $\alpha$ .** Пусть решается уравнение (9.7), причем точное значение функции  $f$  неизвестно, но задана функция  $f_\delta(x)$  и оценка погрешности  $\delta$  такие, что  $\|f_\delta - f\| < \delta$ , а  $\|f_\delta\| > \delta$  (символ  $\| \cdot \|$  понимается в том же смысле, что и в § 4). Пусть  $y_\delta^\alpha(x)$  — функция, реализующая минимальное значение сглаживающего функционала  $M^\alpha[y, f_\delta]$  при значении параметра реализации  $\alpha$ . Если выбрать  $\alpha$  слишком малым, то в выражении (9.8) влияние регуляризирующего слагаемого  $\alpha \Omega[y] = \alpha \int_a^b (p(y')^2 + qy^2) ds$  будет ма-

лым и решение  $y_\delta^\alpha$  окажется „сильно разболтанным“. Если же  $\alpha$  выбрать чересчур большим, то, наоборот, решение окажется „заглаженным“.

Проиллюстрируем сказанное на примере интегрального уравнения

$$\int_{-1}^1 K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (9.12)$$

где  $K(x, s) = \frac{1}{\pi[1 + (x-s)^2]}$ . Ядро подобного типа встречается в задачах гравиметрии (см. гл. 1).

В работе [11] представлены результаты следующего численного эксперимента. Положим  $y(x) = (1 - x^2)^2$ . Тогда из (9.12) можно вычислить  $f(x)$  с заданной степенью точности, например  $\delta = 0,001$ . Попытаемся теперь, располагая прибли-

женным значением  $f(x)$ , восстановить  $y(x)$ , т. е. решить интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

На рис. 3 представлены результаты расчета, которые получаются непосредственным применением конечно-разностного метода без регуляризации. Использовалась разностная схема

$$\sum_{j=1}^n K(x_i, x_j) y_j h = f(x_i) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9.13)$$

Сплошная кривая на рисунке представляет собой график точного решения  $y(x) = (1 - x^2)^2$ . Числа, помеченные возле вертикальных линий, представляют собой значения  $y_j$ , вычисленные из алгебраических уравнений (9.13). Как видно, эти значения сильно разбросаны и отвечающие им точки даже не умещаются в пределах чертежа, что отмечено стрелками. Эти точки не имеют ничего общего с графиком кривой  $y = (1 - x^2)^2$ , которую, как можно заключить, получить описанным путем не удастся.

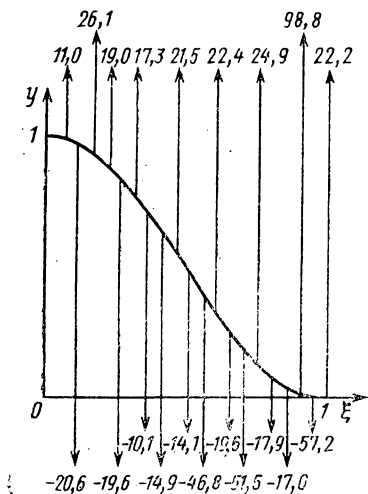


Рис. 3

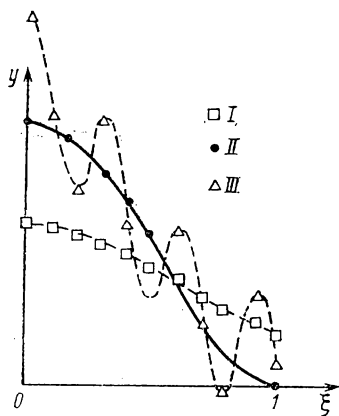


Рис. 4

На рис. 4 представлен результат решения той же задачи с применением метода регуляризации. На этом чертеже сплошная кривая снова означает график решения  $y = (1 - x^2)^2$ . Кривые I, II, III получены в результате выбора  $\alpha = 10^{-1}$ ,  $\alpha = 10^{-6}$  и  $\alpha = 10^{-9}$  соответственно. При этом видно, что кривая II в пределах точности чертежа совпадает с графиком точного решения. В случае I  $\alpha$  оказалось чересчур большим, а в случае III — чересчур малым.

Чтобы избежать обеих нежелательных крайностей в выборе  $\alpha$ , целесообразно использовать так называемый принцип невязки. А именно рассмотрим функцию

$$\rho(\alpha) = \|Ay_\delta^\alpha - f_\delta\|^2, \quad (9.14)$$

которая называется невязкой. Имеет место следующее утверждение:  $\delta(\alpha)$  при  $\alpha > 0$  является монотонно возрастающей дифференцируемой функцией  $\alpha$ . При этом  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \rho(\alpha) < \delta^2$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \rho(\alpha) = \|f_\delta\|^2 > \delta^2$ . Следовательно, уравнение  $\rho(\alpha) = \delta^2$  имеет единственный корень  $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ . Это значение  $\alpha$  и следует выбирать в качестве регуляризации. (Можно показать, что при таком  $\alpha$  функция  $y_\delta^\alpha$  реализует минимум функционала  $\Omega[y]$  в классе функций, удовлетворяющих условию  $\|Ay - f_\delta\| \leq \delta$ ).

Итак, рассматриваемый алгоритм регуляризации состоит в том, что численными методами (например, методом Ньютона) ищется корень уравнения  $\rho(\alpha) = \delta^2$ . При этом величина  $\rho(\alpha)$  при нужных значениях  $\alpha$  вычисляется согласно (9.14), где  $y_\delta^\alpha$  — функция, реализующая минимум  $M^\alpha[y, f_\delta]$ . Эта функция определяется методами, указанными в п. 1.

Во введении, в п. 3 §2, в качестве одного из примеров задач, приводящих к уравнению Фредгольма первого рода, была указана задача восстановления размытого изображения. В этой задаче требуется определить освещенность  $u(x, y)$  неразмытого изображения по известной освещенности  $v(x, y)$  размытого. Функции  $u$  и  $v$  связаны соотношением



Рис. 5

$$v(x, y) = \int_a^b \int_c^d F((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) u(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (9.15)$$

$$\text{где } F(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha > r^2, \\ \frac{1}{\pi r^2} & \text{при } 0 < \alpha \leq r^2, \end{cases} \quad r = \text{const.}$$

В работе [12] уравнение (9.15) решалось с помощью рассмотренных выше методов регуляризации. На рис. 5 приведены результаты расчетов. Расплывчатый текст — заданная функция  $v(x, y)$ . Ясный текст в середине рисунка — восстановленная из (9.15) функция  $u(x, y)$ .

## НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ

## ОБ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

## § 29.

## РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ

## ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегро-дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию как под знаком интеграла, так и под знаком производной. В качестве простейших можно привести уравнения

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y(x) + \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad (10.1)$$

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y(x) + \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (10.2)$$

Поскольку уравнения (10.1) и (10.2) содержат производную  $\frac{dy}{dx}$ , то требуется задание начального условия

$$y(a) = y^0. \quad (10.3)$$

Интегро-дифференциальные уравнения очень разнообразны. В них могут входить производные более высоких порядков, например,

$$Ly = \frac{dy^2}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = \int_b^a K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (10.4)$$

Тогда в качестве дополнительных условий следует взять

$$y(a) = y^0, \quad y'(a) = y^1 \quad (10.5)$$

(начальная задача) или

$$y(a) = y^0, \quad y(b) = y^1 \quad (10.6)$$

(краевая задача). Заметим, что с задачей типа (10.4), (10.6) мы уже встречались в гл. 8 (см. (8.12)).

Производные могут входить, кроме того, под знак интеграла. Могут быть интегро-дифференциальные уравнения с частными производными, в которых интегрирование ведется, вообще говоря, по многомерной области.

Встречаются уравнения, в которых интегрирование ведется по одному аргументу искомой функции, а дифференцирование — по другому. Например,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(x, t)y(x, t) + \int_a^b K(x, t, s)y(s, t)ds + f(x, t). \quad (10.7)$$

Встречаются также системы интегро-дифференциальных уравнений и нелинейные уравнения. В рассмотренных ниже физических примерах мы встретимся и с теми и с другими.

Читателям, желающим получить более полное представление о видах интегро-дифференциальных уравнений, можно рекомендовать специальную литературу, указанную, например, в [20].

### § 30.

#### ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ

1. Пусть человек совершает некоторую работу  $A$ . Со свежими силами он может развить мощность  $\frac{dA}{dt} = W_0$ , где  $W_0 = \text{const}$ . Если же человек до этого уже работал, то производительность его труда меньше вследствие усталости. Эта усталость определяется как величиной ранее затраченных усилий, так и временем восстановления сил после предыдущей работы. В результате получаем, что производительность труда определяется уравнением

$$\frac{dA}{dt} = W_0 - \int_0^t \frac{dA}{d\tau}(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad (10.8)$$

где  $f(t-\tau)$  характеризует влияние мощности  $\frac{dA}{d\tau}(\tau)$ , затраченной в момент  $\tau$ , на усталость человека в момент  $t$ . Интегрируя по частям последнее слагаемое в соотношении (10.8) и обозначая  $f'(\xi) = K(\xi)$ , получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dt} = W_0 - A(t)f(0) + \int_0^t A(\tau)K(t-\tau)d\tau, \quad A(0) = 0,$$

которое и определяет работу, совершенную человеком к моменту  $t$ .

**Замечание.** Дифференцируя (10.8), можно получить интегро-дифференциальное уравнение относительно  $W(t)$ , где  $W = \frac{dA}{dt}$ ,

$$\frac{dW}{dt} = -W(t)f(0) - \int_0^t K(t-\tau)W(\tau)d\tau, \quad W(0) = W_0.$$

2. В качестве второго примера рассмотрим задачу из теории электрических цепей, о которой уже говорилось в п. 2 § 2.

Тогда задача была сведена к интегральному уравнению относительно  $i_L$ .

Убедимся, что эту задачу можно свести к интегро-дифференциальному уравнению относительно  $u$ . Действительно, воспользуемся тем, что  $i_L = -\frac{u}{R} - C\dot{u}$ . Без магнитного сердечника справедливо соотношение  $i_L = \frac{\Phi}{L}$ , где  $\Phi = \int_{t_0}^t u dt$ , а

при наличии магнитного сердечника возникает явление гистерезиса и имеет место более сложное соотношение

$$i_L = \frac{\Phi}{L} + \int_{t_0}^t P(t, s)\Phi(s)ds, \quad (10.9)$$

где функция  $P(t, s)$  учитывает влияние значения потока индукции в момент  $s$  на силу тока в момент  $t$  и определяется эмпирическим способом. Учитывая выражение для  $\Phi$  через  $u$ , получим

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi)d\xi + \int_{t_0}^t P(t, s)ds \int_{t_0}^s u(\xi)d\xi = \\ &= \int_{t_0}^t H(t, \xi)u(\xi)d\xi, \quad H(t, \xi) = \frac{1}{L} + \int_{\xi}^t P(t, s)ds. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$C\dot{u} = -\frac{u}{R} - \int_{t_0}^t H(t, \xi)u(\xi)d\xi, \quad u(t_0) = u_0, \quad (10.10)$$

что и требовалось.

**Замечание.** Соотношение (10.10) можно получить из (1.6), используя формулу (6.35).

3. Этот пример относится к области экологии. Рассмотрим так называемую модель „хищник — жертва“. Пусть в некоторой среде обитания сосуществуют два вида живых организмов. Один из этих видов „жертвы“ может неограниченно получать питание из окружающей среды. Обозначим число особей этого вида  $N_1(t)$ . Второй вид — „хищники“, число которых  $N_2(t)$  питается только представителями первого



вида. Число встреч, кончающихся гибельным исходом для первого вида, пропорционально  $N_1 N_2$ . Отсюда следует, что за время  $dt$  изменение числа  $N_1$  будет  $dN_1 = (k_1 N_1 - \varepsilon_1 N_1 N_2) dt$ , где  $k_1$  характеризует скорость размножения „жертв“ в отсутствие „хищников“.

„Хищники“ умирают естественной смертью и их убыль за время  $dt$  выражается величиной  $-k_2 N_2 dt$ . Что касается их рождаемости, то она зависит от питания в течение некоторого времени  $T$ , предшествующего появлению потомства. Отсюда

$$dN_2 = \left[ -k_2 N_2(t) + \varepsilon_2 N_2(t) \int_{t-T}^t N_1(\tau) f(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

где функция  $f(t-\tau)$  характеризует влияние количества пищи, съеденной хищником в момент  $\tau$  (это количество пропорционально  $N_1(\tau)$ ), на рождаемость в момент  $t$ .

В результате получаем, что численность рассматриваемых популяций удовлетворяет системе нелинейных уравнений

$$\frac{dN_1}{dt} = (k_1 - \varepsilon_1 N_2(t)) N_1(t),$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \left( -k_2 + \varepsilon_2 \int_{t-T}^t N_1(\tau) f(t-\tau) d\tau \right) N_2(t),$$

одно из которых является дифференциальным, а другое — интегро-дифференциальным.

**Замечание.** Если процесс рассматривается начиная с некоторого момента  $t = t_0$ , то нижний предел можно положить постоянным и равным  $t_0 - T$ , а функцию  $f(t-\tau)$  считать равной нулю, если  $t-\tau > T$ .

Обратим внимание читателей на монографию [9], которая является одним из классических трудов по математическим задачам экологии.

4. К уравнениям „типа (10.7)“ относится хорошо известное в физике так называемое кинетическое уравнение Больцмана. Оно имеет значительно более сложную структуру, но характерным является то, что дифференцирование производится по одному аргументу, а интегрирование — по другим. Это уравнение описывает состояние идеального одноатомного газа с учетом столкновений частиц.

В случае однородного и изотропного газа и отсутствия внешних сил оно имеет вид [19]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \int [f(\mathbf{v}', t) \cdot f(\mathbf{v}_1', t) - f(\mathbf{v}, t) \cdot f(\mathbf{v}_1, t)] |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\omega d\mathbf{v}_1.$$

Здесь  $f(\mathbf{v}, t)$  — плотность распределения частиц газа (т. е.  $f(\mathbf{v}, t)dv^1dv^2dv^3$  — это число частиц газа, координаты скорости которых в момент  $t$  заключены в интервале  $dv^1 dv^2 dv^3$ );  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$  — скорости частиц газа до столкновения;  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1$  — скорости частиц после столкновения;  $d\omega$  — элемент площади в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ ;  $\alpha$  — некоторый параметр. Скорости  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1$  связаны с  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$  законами сохранения энергии и импульса. Связь эта зависит от предполагаемого механизма взаимодействия частиц.

5. Интегро-дифференциальные уравнения, встречающиеся в физике, весьма разнообразны. Объектом интенсивного изучения в настоящее время является так называемое уравнение Уизема [29]

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u_y(y, t)dy = 0, \quad (10.11)$$

описывающее распространение нелинейных волн в диспергирующих и диссипативных средах. Ядро  $K(\alpha)$  в этом уравнении имеет особенность при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Это уравнение было предложено Уиземом для изучения поверхностных волн на мелкой воде. При этом функция  $u(x, t)$  описывает свободную поверхность жидкости.

Различные частные случаи уравнения (10.11) применяются также в гидродинамике неизотермической плазмы без столкновений и при изучении так называемых стратифицированных (слоистых) сред.

### § 31.

#### ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

**1. Линейное уравнение.** Рассмотрим сначала интегро-дифференциальное уравнение (10.1) с начальным условием (10.3):

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y(x) + \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad y(a) = y^0. \quad (10.12)$$

Предположим, что  $A(x)$  и  $f(x)$  непрерывны при  $a \leq x \leq b$ ,  $K(x, s)$  непрерывно при  $a \leq s \leq x \leq b$ .

Задачу (10.12) можно свести к интегральному уравнению типа Вольтерра, рассмотренному в гл. 7. Действительно, решая (10.12) как дифференциальное уравнение с неоднородностью

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x),$$

получим

$$y(x) = y^0 e^{\int_a^x A(\eta) d\eta} + \int_a^x e^{\int_a^{\xi} A(\eta) d\eta} \left[ \int_a^{\xi} K(\xi, s) y(s) ds \right] d\xi + \\ + \int_a^x e^{\int_a^{\xi} A(\eta) d\eta} f(\xi) d\xi. \quad (10.13)$$

Меняя во втором слагаемом порядок интегрирования, будем иметь

$$y(x) = \int_a^x \tilde{K}(x, s) y(s) ds + \tilde{f}(x), \quad (10.14)$$

где  $\tilde{f}(x)$  есть сумма первого и третьего слагаемого в (10.13), а

$$\tilde{K}(x, s) = \int_s^x K(\xi, s) e^{\int_a^{\xi} A(\eta) d\eta} d\xi.$$

Уравнение (10.14) относится, очевидно, к классу (7.1). Применяя теорему 7.1, делаем вывод, что решение задачи (10.12) существует и единственно на отрезке  $a \leq x \leq b$ .

**2. Нелинейные уравнения.** Пусть задана система уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = \mathcal{F}_i(x, y_1, \dots, y_n, \int_a^x K_1(x, s, y_1(s), \dots, y_n(s)) ds, \dots \\ \dots, \int_a^x K_p(x, s, y_1(s), \dots, y_n(s)) ds), \quad (10.15) \\ i = 1, \dots, n, \quad 1 \leq p \leq n$$

при начальных условиях

$$y_i(a) = y_i^0. \quad (10.16)$$

Здесь  $\mathcal{F}_i(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p)$  и  $K_l(x, s, y_1, \dots, y_n)$  — заданные функции своих аргументов.

Приведенная в п. 2 предыдущего параграфа система уравнений, описывающая модель „хищник — жертва“, принадлежит этому классу.

Метод последовательных приближений, которым мы пользовались в гл. 7, может быть развит и применен к исследованию вопроса существования решения нелинейной задачи (10.15), (10.16). Изложенный ниже способ доказательства

представляет собой обобщение схемы, описанной в [25] для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы здесь рассмотрим случай  $n = p = 1$ . Исследование общего случая  $p \neq 1$ ,  $n \neq 1$  принципиальных осложнений не представляет.

Итак, имеем задачу

$$\frac{dy}{dx} = \mathcal{F}(x, y(x), \int_{x_0}^x K(x, s, y(s))ds), \quad (10.17)$$

$$y(x_0) = y^0.$$

Справедлива

**Теорема 10.1.** Пусть в области  $R = \{x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y^0| \leq b, x_0 \leq s \leq x\}$  функция  $K(x, s, y)$  непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию Липшица по  $y$

$$|K(x, s, \bar{y}) - K(x, s, \bar{\bar{y}})| \leq L_0 |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|$$

$((x, s, \bar{y}) \in R, (x, s, \bar{\bar{y}}) \in R, L$  — одна и та же постоянная для любой пары точек из  $R$ ), а функция  $\mathcal{F}(x, y, z)$  непрерывна по совокупности аргументов в  $D = \{x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y^0| \leq b, |z| \leq \bar{K}a\}$ , где  $\bar{K} = \sup_R |K|$ , и удовлетворяет условию Липшица по  $y$  и  $z$

$$|\mathcal{F}(x, \bar{y}, \bar{z}) - \mathcal{F}(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}})| \leq L_1 |\bar{y} - \bar{\bar{y}}| + L_2 |\bar{z} - \bar{\bar{z}}|$$

$((x, \bar{y}, \bar{z}) \in D, (x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}}) \in D, L_1$  и  $L_2$  — одни и те же постоянные для любой пары точек из  $D$ ).

Тогда при  $0 \leq x - x_0 \leq h = \min \left\{ a, \frac{b}{\bar{F}} \right\}$ , где  $\bar{F} = \sup_D |\mathcal{F}|$  существует единственное решение задачи (10.17).

**Доказательство.** Перейдем от задачи (10.17) к интегральному уравнению

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^x \mathcal{F}(t, y(t), \int_{x_0}^t K(t, s, y(s))ds)dt \quad (10.18)$$

и построим последовательность приближений

$$y^{(0)} = y^0,$$

$$y^{(k+1)}(x) = y^0 + \int_{x_0}^x \mathcal{F}(t, y^{(k)}(t), \int_{x_0}^t K(t, s, y^{(k)}(s))ds)dt. \quad (10.19)$$

Методом индукции нетрудно доказать непрерывность функций  $y^{(n+1)}$  и неравенство  $|y - y^0| \leq b$ .

Оценим  $y^{(k+1)} - y^{(k)}$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 |y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \mathcal{F}(t, y^{(k)}(t), \int_{x_0}^t K(t, s, y^{(k)}(s)) ds) - \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{F}(t, y^{(k-1)}(t), \int_{x_0}^t K(t, s, y^{(k-1)}(s)) ds) dt \right| \leq \\
 &\leq \int_{x_0}^x \left\{ L_1 |y^{(k)} - y^{(k-1)}| + L_2 \int_{x_0}^t |K(t, s, y^{(k)}(s)) - K(t, s, y^{(k-1)}(s))| ds \right\} dt \leq \\
 &\leq \int_{x_0}^x \left\{ L_1 |y^{(k)} - y^{(k-1)}| + L_0 L_2 \int_{x_0}^t |y^{(k)}(s) - y^{(k-1)}(s)| ds \right\} dt. \quad (10.20)
 \end{aligned}$$

Из (10.19) имеем

$$|y^{(1)} - y^{(0)}| \leq \bar{F}(x - x_0).$$

Предположим, что для  $k \geq 1$  выполнено

$$|y^{(k)}(x) - y^{(k-1)}(x)| \leq \bar{F} L^{k-1} \frac{(x - x_0)^k}{k!}, \quad (10.21)$$

где  $L = L_1 + L_0 L_2 a$ . Тогда из (10.20) получим

$$\begin{aligned}
 |y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)| &\leq \int_{x_0}^x \left\{ L_1 \bar{F} L^{k-1} \frac{(t - x_0)^k}{k!} + \right. \\
 &\quad \left. + L_2 L_0 \int_{x_0}^t \bar{F} L^{k-1} \frac{(s - x_0)^k}{k!} ds \right\} dx = L_1 \bar{F} L^{k-1} \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} + \\
 &+ \bar{F} L_2 L_0 L^{k-1} \frac{(x - x_0)^{k+2}}{(k+2)!} \leq \bar{F} L^{k-1} \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} (L_1 + L_2 L_0 a) = \\
 &= \bar{F} L^k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!},
 \end{aligned}$$

т. е. оценка (10.21) справедлива для номера, на единицу большего.

Итак, неравенство (10.21) справедливо для любого  $k$ . Отсюда следует равномерная сходимость ряда с членами  $y^{(k)}(x) -$

$^{(k-1)}$   
 $-y(x)$  и равномерная сходимость последовательности  $y^{(k)}(x)$   
 при  $x - x_0 \leq h$  к некоторой непрерывной функции  $y(x)$ , так  
 как

$$y^{(k)}(x) = \sum_{m=1}^k (y^{(m)}(x) - y^{(m-1)}(x)) + y^0.$$

Предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  в равенстве (10.19) дает соотношение (10.18).

Отсюда следует дифференцируемость  $y(x)$  и обращение в тождество уравнения (10.17).

Доказательство единственности можно провести также одним из традиционных способов. Предположим, что имеются два решения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  задачи (10.17). Тогда  $z = y_1 - y_2$  удовлетворяет неравенству (которое получается так же, как неравенство (10.20))

$$|z| \leq \int_{x_0}^x (L_1 |z| + L_0 L_2 \int_{x_0}^t |z(s)| ds) dt, \quad z(x_0) = 0. \quad (10.22)$$

Пусть  $\bar{z} = \max |z|$  при  $0 \leq x - x_0 \leq h$ . Так как  $z \neq 0$ , то  $\bar{z} \neq 0$ . Рассмотрим промежуток  $0 \leq x - x_0 \leq \delta \leq L/2$ . Из (10.22) следует, что на этом промежутке либо  $z \equiv 0$ , либо справедливо неравенство

$$\bar{z} \leq (L_1 + L_0 L_2 a) \bar{z} \delta = L \bar{z} \delta,$$

т. е.  $1 \leq L \delta = 1/2$ , что является противоречием. Следовательно,  $z(x) \equiv 0$  при  $x - x_0 \leq \delta$ . Тогда в неравенстве (10.22) можно заменить  $x_0$  на  $x_0 + \delta$  и, повторив рассуждения, получить, что  $z(x) \equiv 0$  при  $x \leq x_0 + 2\delta$ . Продолжая процесс, через конечное число шагов получим, что  $z(x) \equiv 0$  при  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ . Теорема доказана.

**Замечание.** В отличие от линейного случая, разобранного в п. 1, утверждение теоремы 10.1 носит локальный характер, т. е. существование решения гарантируется не на всем заданном промежутке  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$  изменения  $x$ , а на некотором достаточно малом отрезке  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ .

Точку  $x_1 = x_0 + h$ ,  $y_1 = y(x_0 + h)$  можно принять за новую начальную точку и применить описанные выше построения к задаче

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = \mathcal{F}(x, \tilde{y}(x), \int_{x_0}^{x_1} K(x, s, y(s)) ds + \int_{x_1}^x K(x, s, \tilde{y}(s)) ds),$$

$$\tilde{y}(x_1) = y_1. \quad (10.23)$$

Тем самым можно доказать существование решения задачи на некотором отрезке  $[x_1, x_2]$ ,  $x_2 = x_1 + h_1$ .

Решение  $\tilde{y}(x)$  задачи (10.23) можно рассматривать как продолжение решения  $y(x)$  задачи (10.17) на отрезок  $[x_1, x_2]$ .

Продолжая шаг за шагом описанные рассуждения, можно „довести“ график решения  $y(x)$  до границы заданной области  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ ,  $|y - y_0| \leq b$ .

## § 32.

### ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

Обратимся сначала к задаче (10.2), (10.3). Сведем эту задачу к интегральному уравнению, пользуясь способом, уже применявшимся в п. 1 предыдущего параграфа. Рассматривая (10.2) как дифференциальное уравнение с неоднородностью

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x), \text{ получим}$$

$$y(x) = \int_a^x e^{\int_a^x A(\eta)d\eta} \int_a^b K(\xi, s)y(s)ds +$$

$$+ \int_a^x e^{\int_a^x A(\eta)d\eta} f(\xi)d\xi + y^0 e^{\int_a^x A(\eta)d\eta}. \quad (10.24)$$

Меняя порядок интегрирования в первом слагаемом, будем иметь

$$y(x) = \int_a^b \tilde{K}(x, s)y(s)ds + \tilde{f}(x), \quad (10.25)$$

где  $\tilde{f}(x)$  — сумма двух последних слагаемых в (10.24), а

$$\tilde{K}(x, s) = \int_a^x e^{\int_a^x A(\eta)d\eta} K(\xi, s)ds.$$

Таким образом, задача (10.2), (10.3) свелась к линейному интегральному уравнению типа Фредгольма (10.25), ядро которого, вообще говоря, несимметрично, даже если  $K(x, s)$  симметрично. Для этого уравнения справедлива теория, развитая в § 18.

Точно так же, если существует функция Грина  $G(x, \xi)$  оператора  $Ly$  при условиях (10.6), то задача (10.4), (10.6) сводится к интегральному уравнению вида (10.25), где

$$\tilde{f}(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi + \tilde{y}(x)$$

$\tilde{y}(x)$  — решение однородного уравнения  $Ly = 0$  при условиях (10.6)), а

$$\tilde{K}(x, s) = \int_a^b K(\xi, s) G(x, \xi) d\xi.$$

Именно таким приемом мы пользовались в § 25.

Рассмотрим теперь уравнение (10.7). Зададим начальное условие

$$y(x, 0) = \Phi(x) \quad (10.26)$$

(подчеркнем, что в отличие от (10.3) здесь начальное значение является функцией  $x$ ).

Способ, примененный выше к уравнениям (10.1) и (10.2), в данном случае приводит к интегральному уравнению с двойным интегралом

$$y(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_a^b \tilde{K}(x, s, t, \tau) y(s, \tau) ds + \tilde{f}(x, t), \quad (10.27)$$

$$\text{где } \tilde{f}(x, t) = \Phi(x) e^{\int_{t_0}^t A(x, \eta) d\eta} + \int_0^{t_0} e^{\int_{\tau}^t A(x, \eta) d\eta} f(x, \tau) d\tau,$$

$$\tilde{K}(x, s, t, \tau) = K(x, s, \tau) e^{\int_{\tau}^t A(x, \eta) d\eta}.$$

Интегральные уравнения вида (10.27) нами не рассматривались, однако для них можно провести рассуждения, аналогичные приведенным в § 21. При этом получим, что решение (10.27) существует, единственно и может быть найдено путем последовательных приближений.

Можно выделить случай, когда решение задачи (10.7), (10.26) удастся построить в виде разложения по собственным функциям ядра. Пусть  $A = A(t)$ ,  $K = K(x, s) = K(s, x)$ ,  $f = f(x)$ , т. е. уравнение имеет вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t)y(x, t) + \int_a^b K(x, s)y(s, t)ds + f(x). \quad (10.28)$$

Будем строить решение задачи (10.28), (10.26) при  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Представим  $y(x, t)$  в виде

$$y(x, t) = g(x, t) + \tilde{y}(x, t), \quad (10.29)$$

где  $\tilde{y}(x, t)$  удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{\partial \tilde{y}(x, t)}{\partial t} = A(t)\tilde{y}(x, t) + f(x), \quad \tilde{y}(x, 0) = \Phi(x)$$



и, следовательно,

$$\tilde{y}(x, t) = \Phi(x)e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} + f(x)\int_0^t e^{\int_\tau^t A(\eta)d\eta} d\tau. \quad (10.30)$$

Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = A(t)g(x, t) + \int_a^b K(x, s)g(s, t)ds + p(x, t), \quad (10.31)$$

$$g(x, 0) = 0.$$

Здесь

$$p(x, t) = \int_a^b K(x, s)\tilde{y}(s, t)ds.$$

Функцию  $g(x, t)$  будем искать в виде

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)y_n(x), \quad (10.32)$$

где  $y_n(x)$  — собственные функции ядра  $K(x, s)$ . Подставляя (10.32) в (10.31), приравнявая слагаемые при  $y_n(x)$ , получим

$$\frac{dg_n}{dt} = A(t)g_n(t) + \frac{g_n(t)}{\lambda_n} + \frac{\tilde{y}_n(t)}{\lambda_n}, \quad g_n(0) = 0, \quad (10.33)$$

где  $\tilde{y}_n(t)$  — коэффициент Фурье функции  $\tilde{y}(x, t)$ , т. е.  $\tilde{y}_n(t) = \int_a^b \tilde{y}(x, t)y_n(x)dx$ . В отличие от (6.3) для  $g_n(t)$  получилось обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид

$$g_n(t) = \int_0^t e^{\int_\tau^t A(\eta)d\eta} + \frac{t-\tau}{\lambda_n} \tilde{y}_n(\tau) d\tau. \quad (10.34)$$

Для  $\tilde{y}_n(t)$  из (10.30) имеем

$$\tilde{y}_n(t) = \int_a^b \tilde{y}(x, t)y_n(x)dx = \Phi_n e^{\int_0^t A(\eta)d\eta} + f_n \int_0^t e^{\int_\tau^t A(\eta)d\eta} d\tau,$$

где  $\Phi_n, f_n$  — коэффициенты Фурье функций  $\Phi(x)$  и  $f(x)$ . Поскольку при  $t \leq T$

$$\left| e^{\int_\tau^t A(\eta)d\eta} \right| \leq C_1, \quad \left| \int_a^t e^{\int_\tau^t A(\eta)d\eta} d\tau \right| \leq C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые константы, то  $\max_t |\tilde{y}_n(t)| \leq C_1 |\Phi_n| + C_2 |f_n|$ . Так как  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то экспоненты, стоящие под знаком интеграла в (10.34), равномерно ограничены по  $t$  и  $n$ . Из (10.34) получаем оценку для  $g_n(t)$ :

$$\max_t |g_n(t)| \leq \frac{C}{\lambda_n} (C_1 |\Phi_n| + C_2 |f_n|). \quad (10.35)$$

В силу этой оценки ряд (10.32) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{\lambda_n} (C_1 |\Phi_n| + C_2 |f_n|) \cdot |y_n(x)|, \quad (10.36)$$

представляющим собой сумму двух рядов, равномерная сходимость каждого из которых доказывается так же, как в теореме Гильберта — Шмидта в § 10. Поэтому ряд (10.32) сходится равномерно относительно  $x$  и  $t$  и  $g(x, t)$  является непрерывной функцией  $x$  и  $t$ .

Для того чтобы обосновать проведенные выше преобразования, необходимо убедиться в существовании непрерывной производной  $\frac{\partial g}{\partial t}$  и в возможности ее вычисления почленным дифференцированием ряда (10.32). Для этого надо убедиться в равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dg_n(t)}{dt} y_n(x). \quad (10.37)$$

Из (10.33) видно, что  $\frac{dg_n}{dt}$  имеет такую же оценку (10.35) (может быть, лишь с другой константой  $C$ ). Поэтому ряд (10.37) также равномерно сходится. Тем самым функция  $g(x, t)$ , определяемая рядом (10.32), является решением задачи (10.31), а следовательно,  $y(x, t)$  является решением задачи (10.28), (10.26). Таким образом, справедлива

**Теорема 10.2.** *Решение задачи (10.28), (10.26) дается формулой (10.29), в которой функция  $\tilde{y}(x, t)$  определяется из (10.30), а функция  $g(x, t)$  представляется рядом Фурье (10.32) по собственным функциям  $y_n(x)$  ядра  $K(x, s)$ . Коэффициенты  $g_n(t)$  определяются формулой (10.34), в которой  $\tilde{y}_n(t)$  есть коэффициент Фурье функции  $\tilde{y}(x, t)$ , а  $\lambda_n$  — собственное значение ядра  $K(x, s)$ , отвечающее собственной функции  $y_n(x)$ .*

Полученное решение является единственным, поскольку задача (10.26), (10.28) является частным случаем задачи (10.7), (10.26), а решение последней, как было указано выше, единственно.

### § 33.

#### СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Нередко в интегро-дифференциальное уравнение входит в качестве множителя при производных малый параметр  $\mu$ . Если формально положить  $\mu = 0$ , то либо порядок уравнения понижается, либо оно вообще не содержит производных и становится интегральным. Такие системы называются сингулярно возмущенными системами.

Ставится следующий вопрос: если параметр  $\mu$  достаточно мал, будет ли решение системы с параметром  $\mu$  близко к решению системы, которая получается из исходной, если положить  $\mu = 0$ ? Такая система, как правило, проще исходной и поэтому ответ на поставленный вопрос (если этот ответ положительный) существенно облегчает исследование исходной системы.

Примером сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения является уравнение (10.10) в случае малой емкости. Уравнение (8.12) также является сингулярно возмущенным, поскольку параметр  $\alpha$  считается малым.

В настоящем параграфе мы рассмотрим поставленный вопрос для простейших случаев. Более обстоятельные сведения содержатся в [7]. Основы теории сингулярных возмущений для дифференциальных уравнений изложены в учебнике [25].

Пусть задано интегро-дифференциальное уравнение

$$\mu \frac{dy}{dx} = A(x)y(x) + \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad (10.38)$$

в котором  $A(x) \neq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ),  $\mu > 0$  является малым параметром. Неизвестная функция  $y$  фактически является функцией двух переменных:  $x$  и  $\mu$ , т. е.  $y = y(x, \mu)$ . Поставим начальное условие

$$y(a, \mu) = y^0. \quad (10.39)$$

Положив в (10.38) формально  $\mu = 0$ , получим интегральное уравнение

$$0 = A(x)y(x) + \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (10.40)$$

Будет ли решение  $y(x, \mu)$  задачи (10.38), (10.39) при  $\mu \rightarrow 0$  стремиться к решению уравнения (10.40), которое мы обозначим через  $y_0(x)$ . Согласно терминологии теории сингулярных возмущений уравнение (10.40) называется вырожденной задачей.

Мы докажем, что так же, как и для дифференциальных уравнений (см. [25]), ответ на этот вопрос является положи-

тельным, если выполнено некоторое условие устойчивости, которое в данном случае имеет вид

$$A(x) < 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (10.41)$$

При этом условии предельный переход  $y(x, \mu) \rightarrow \bar{y}_0(x)$  имеет место при  $a < x \leq b$  и не является равномерным. Для построения асимптотической формулы, которая дает равномерное приближение к  $y(x, \mu)$ , нужно к решению вырожденной системы  $\bar{y}_0(x)$  прибавить так называемую пограничную функцию  $\Pi_0$ . Определим ее дифференциальным уравнением

$$\frac{d\Pi_0}{d\xi} = A(a)\Pi_0 \quad \left( \xi = \frac{x-a}{\mu} \right) \quad (10.42)$$

при условии

$$\Pi_0|_{\xi=0} = y^0 - \bar{y}_0(a).$$

Выражение для  $\Pi_0$  может быть выписано явно, а именно

$$\Pi_0 = [y^0 - \bar{y}_0(a)] e^{A(0)\xi} = [y^0 - \bar{y}_0(a)] e^{A(0) \frac{x-a}{\mu}} \quad (10.43)$$

Докажем следующую теорему:

**Теорема 10.3.** При достаточно малых  $\mu \leq \mu_0$  для решения  $y(x, \mu)$  задачи (10.38), (10.39) на сегменте  $a \leq x \leq b$  справедливо представление

$$y(x, \mu) = \bar{y}_0(x) + \Pi_0 + R_1(x, \mu), \quad (10.44)$$

где  $|R_1| \leq C\mu$  ( $C$  — не зависящая от  $\mu$  постоянная.)

**Доказательство.** Подставим  $y(x, \mu)$ , выраженное в виде (10.44), в (10.38) и (10.39). Свойства  $R_1$  пока неизвестны, так что тем самым мы просто перешли к новой неизвестной функции  $R_1$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\bar{y}_0}{dx} + \frac{d\Pi_0}{d\xi} + \mu \frac{dR_1}{dx} &= A(x)(y_0 + \Pi_0 + R_1) + \\ &+ \int_a^x K(x, s)[y_0(s) + \Pi_0(s, \mu) + R_1(s, \mu)]ds + f(x). \end{aligned}$$

Учитывая определение  $\bar{y}_0$  и  $\Pi_0$ , получим для  $R_1$  уравнение

$$\begin{aligned} \mu \frac{dR_1}{dx} &= A(x)R_1(x, \mu) + \int_a^x K(x, s)R_1(s, \mu)ds + \\ &+ F(x, \mu), \end{aligned} \quad (10.45)$$

где  $F(x, \mu) = [A(x) - A(0)]\Pi_0 + \int_a^x K(x, s)\Pi_0\left(\frac{s-a}{\mu}\right)ds - \mu \frac{d\bar{y}_0}{dx}$ .

Пользуясь (10.43), для  $F(x, \mu)$  нетрудно получить при  $a \leq x \leq b$  и достаточно малых  $\mu \leq \mu_0$  оценку

$$|F(x, \mu)| < C_1 \mu, \quad (10.46)$$

где  $C_1$  — некоторая не зависящая от  $\mu$  постоянная. Начальное условие для  $R_1$ , очевидно, следующее:

$$R_1(a, \mu) = 0. \quad (10.47)$$

Из (10.45), (10.47), интегрируя уравнение (10.45) как дифференциальное с неоднородностью  $\int_a^x (\dots) ds + F$ , имеем

$$\begin{aligned} R_1(x, \mu) = & \int_a^x e^{\frac{1}{\mu} \int_{\xi}^x A(\eta) d\eta} d\xi \frac{1}{\mu} \int_a^{\xi} K(\xi, s) R_1(s, \mu) ds + \\ & + \int_a^x e^{\frac{1}{\mu} \int_{\xi}^x A(\eta) d\eta} \frac{1}{\mu} F(\xi, \mu) d\xi. \end{aligned}$$

Изменяя в первом слагаемом порядок интегрирования, получим

$$R_1(x, \mu) = \int_a^x \tilde{K}(x, s, \mu) R_1(s, \mu) ds + \tilde{F}(x, \mu),$$

$$\text{где } \tilde{K} = \int_s^x e^{\frac{1}{\mu} \int_{\xi}^x A(\eta) d\eta} \frac{1}{\mu} K(\xi, s) d\xi, \quad \tilde{F} = \int_a^x e^{\frac{1}{\mu} \int_{\xi}^x A(\eta) d\eta} \frac{1}{\mu} F(\xi, \mu) d\xi.$$

Пользуясь тем, что  $A(x) \leq -\beta = \text{const} < 0$  в силу (10.41), и оценкой (10.46), нетрудно получить неравенства

$$|K(x, s, \mu)| \leq \bar{K} = \text{const}, \quad |\tilde{F}(x, \mu)| < C_2 \mu.$$

Отсюда оценка  $|R_1| \leq C_1 \mu$  получается точно таким же способом, как в [25, с. 202].

Доказанная теорема говорит о том, что выражение  $\bar{y}_0(x) + \Pi_0\left(\frac{x-a}{\mu}\right)$  является асимптотической формулой для решения  $y(x, \mu)$  задачи (10.38), (10.39) с остаточным членом  $R_1(x, \mu) = O(\mu)$ . Можно получить более точную асимптотическую формулу с остаточным членом  $R_k(x, \mu) = O(\mu^k)$ . Мы увидим, что наличие интеграла в уравнении несколько видоизменяет алгоритм, описанный в [25].

Будем искать  $y(x, \mu)$  в виде формального ряда

$$\bar{y}_0(x) + \mu \bar{y}_1 + \dots + \Pi_0(\xi) + \mu \Pi_1(\xi) + \dots \quad \left(\xi = \frac{x-a}{\mu}\right), \quad (10.48)$$

где  $\bar{y}_i(x)$  называются регулярными членами, а  $\Pi_i$  — пограничными членами. Ряд (10.48) нужно подставить в (10.38), (10.39) и приравнять члены с одинаковыми степенями  $\mu$ . При подстановке в (10.38) надо приравнять отдельно члены, зависящие от  $x$  и отдельно — члены, зависящие от  $\xi$ . Имеем

$$\begin{aligned} & \mu \left( \frac{d\bar{y}_0}{dx} + \mu \frac{d\bar{y}_1}{dx} + \dots \right) + \frac{d\Pi_0}{d\xi} + \mu \frac{d\Pi_1}{d\xi} + \dots = \\ & = A(x)[\bar{y}_0(x) + \mu \bar{y}_1(x) + \dots] + A(a + \mu \xi)[\Pi_0(\xi) + \mu \Pi_1(\xi) + \dots] + \\ & \quad + \int_a^x K(x, s)[\bar{y}_0(s) + \mu \bar{y}_1(s) + \dots] ds + \\ & \quad + \int_a^x K(x, s) \left[ \Pi_0\left(\frac{s-a}{\mu}\right) + \mu \Pi_1\left(\frac{s-a}{\mu}\right) + \dots \right] ds. \quad (10.49) \end{aligned}$$

Прежде чем проводить операцию приравнивания членов с одинаковыми степенями  $\mu$ , преобразуем последнее слагаемое в правой части, перейдя к переменной интегрирования  $\eta = (s-a)/\mu$  и записав его в виде суммы двух интегралов  $\int_0^\infty + \int_\infty^\xi$  ( $\xi = (x-a)/\mu$ ):

$$\begin{aligned} & \mu \int_0^\infty K(x, a + \mu \eta)[\Pi_0(\eta) + \mu \Pi_1(\eta) + \dots] d\eta + \\ & + \mu \int_\infty^\xi K(a + \mu \xi, a + \mu \eta)[\Pi_0(\eta) + \mu \Pi_1(\eta) + \dots] d\eta = \\ & = \mu \left[ \int_0^\infty K(x, a) \Pi_0(\eta) d\eta + \int_\infty^\xi K(a, a) \Pi_0(\eta) d\eta \right] + \\ & + \mu^2 \left[ \int_0^\infty K(x, a) \Pi_1(\eta) d\eta + \int_\infty^\xi K'_s(x, a) \eta \Pi_0(\eta) d\eta + \right. \\ & \left. + \int_\infty^\xi K(a, a) \Pi_1(\eta) d\eta + \int_\infty^\xi [K'_x(a, a) \xi + K'_s(a, a) \eta] \Pi_0(\eta) d\eta \right] + \\ & + \dots = -\mu \left[ K(x, a) \frac{y^0 - \bar{y}_0(a)}{A(a)} + K(a, a) \frac{y_0 - \bar{y}_0(a)}{A(a)} e^{\Lambda(0)\xi} \right] + \\ & \quad + \mu^2 [\dots] + \dots \end{aligned}$$

После подстановки полученного выражения в (10.49) можно приравнять члены с одинаковыми степенями  $\mu$ . Приравнивание членов, содержащих  $\mu^0$ , дает уравнения для  $y_0$  и  $\Pi_0$ ,

которые уже были выписаны ранее (см. (10.40) и (10.42)), а приравнивание членов, содержащих  $\mu$ , приводит к уравнениям для  $\bar{y}_1$  и  $\Pi_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{y}_0}{dx} &= A(x)\bar{y}_1 + \int_a^x K(x, s)\bar{y}_1(s)ds - K(x, a)\frac{y^0 - \bar{y}_0(a)}{A(a)}, \\ \frac{d\Pi_1}{d\bar{x}} &= A(a)\Pi_1 + K(a, a)\frac{y^0 - \bar{y}_0(a)}{A(a)}e^{A(a)\bar{x}}.\end{aligned}\quad (10.50)$$

Первое из этих уравнений является интегральным, а второе — дифференциальным, и поэтому второе уравнение (10.50) надо снабдить начальным условием. Это начальное условие мы получим, подставляя (10.48) в (10.39),

$$\bar{y}_0(a) + \mu\bar{y}_1(a) + \dots + \Pi_0(0) + \mu\Pi_1(0) + \dots = y^0.$$

Приравнявая члены, содержащие  $\mu^0$ , получим условие  $\Pi_0(0) = y^0 - \bar{y}_0(0)$ , которое уже было использовано при построении  $\Pi_0$ , а приравнявая члены, содержащие  $\mu$ , имеем

$$\Pi_1(0) = -\bar{y}_1(a). \quad (10.51)$$

Из (10.50) видно, что  $\bar{y}_1(x)$  является решением интегрального уравнения  $\left(\frac{d\bar{y}_0}{dx} - \text{величина известная, поскольку } \bar{y}_0 \text{ найдено}\right)$ , а  $\Pi_1$  является решением дифференциального уравнения при начальном условии (10.51). Выражение для  $\Pi_1$  можно найти, как и выражение для  $\Pi_0$ , в явной форме.

Подобным же образом можно построить следующие члены разложения (10.48) и доказать теорему о том, что

$$|y(x, \mu) - \sum_{i=1}^k \mu^i (\bar{y}_i + \Pi_i)| < C\mu^{k+1} \quad (a \leq x \leq b). \quad (10.52)$$

Пусть теперь в (10.38) верхний предел постоянный:

$$\mu \frac{dy}{dx} = A(x)y(x) + \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x), \quad (10.53)$$

$$y(a, \mu) = y^0, \quad (10.54)$$

и вырожденное уравнение является уравнением Фредгольма

$$0 = A(x)y(x) + \int_a^b K(x, s)y(s)ds + f(x). \quad (10.55)$$

Будем предполагать, что выполнено условие устойчивости (10.41) и что однородное уравнение, соответствующее (10.45), имеет только тривиальное решение, т. е. само уравнение (10.45) имеет единственное решение  $\bar{y}_0(x)$ .

Заметим без доказательства, что в данном случае также справедливо утверждение, аналогичное теореме 10.3, и более общее неравенство (10.52), но алгоритм построения асимптотики несколько изменится. Форма разложения (10.48) и соотношения (10.49) (с заменой в верхнем пределе  $x$  на  $b$ ) сохраняются. Последнее слагаемое в (10.49) имеет вид

$$\begin{aligned} & \mu \int_a^{b/\mu} K(x, a + \mu\eta) [\Pi_0(\eta) + \mu\Pi_1(\eta) + \dots] d\eta = \\ & = \mu \int_0^\infty (\dots) d\eta + \mu \int_\infty^{b/\mu} (\dots) d\eta = \mu \left[ \int_0^\infty K(x, a) \Pi_0(\eta) d\eta + \right. \\ & \quad \left. + \int_\infty^{b/\mu} K(a, a) \Pi_0(\eta) d\eta \right] + \mu^2 [\dots] + \dots \end{aligned} \quad (10.56)$$

В отличие от случая интеграла с верхним пределом  $x$ , второе слагаемое в группе членов с множителем  $\mu$  равно

$$\mu \int_\infty^{b/\mu} K(a, a) \Pi_0(\eta) d\eta = \mu K(a, a) \frac{y^0 - y_0(a)}{A(a)} e^{A(a) \frac{b}{\mu}}, \quad (10.57)$$

т. е. оказывается экспоненциально малым. Поскольку целью всего построения является получение асимптотики с остаточным членом порядка некоторой степени  $\mu$  (см. (10.52)), то величины типа (10.57) при построении можно отбрасывать (привносимые ими невязки будут много меньше степенных по  $\mu$  невязок, которые дают остальные члены).

Таким образом, член  $\mu[\dots]$  в разложении (10.56) вообще не содержит экспоненты  $e^{A(a)z}$ . Как оказывается, тем же свойством обладают и следующие члены разложения (10.56). Поэтому последнее слагаемое (10.47) учитывается только при построении регулярных членов. Итак, имеем

$$A(x) \bar{y}_0(x) + \int_a^b K(x, s) \bar{y}_0(s) ds + f(x),$$

$$\frac{d\Pi_0}{dz} = A(a) \Pi_0, \quad \Pi_0|_{z=0} = y^0 - y_0(a); \quad (10.58)$$

$$A(x) \bar{y}_1(x) + \int_a^b K(x, s) \bar{y}_1(s) ds - \frac{d\bar{y}_0}{dx} - K(x, a) \frac{y^0 - \bar{y}_0(a)}{A(a)},$$



$$\frac{d\Pi_1}{d\xi} = A(a)\Pi_1, \quad \Pi_1|_{\xi=0} = -\bar{y}_1(a);$$

...

Мы познакомились с простейшим случаем уравнения (10.53), когда вырожденное уравнение (10.55) имеет единственное решение. Возникает естественный вопрос: какова будет асимптотика решения задачи (10.53), (10.54), если  $\lambda = -1$  является собственным значением ядра  $K(x, z)/A(x)$  и таким образом вырожденное уравнение (10.55) либо имеет бесконечное множество решений, либо ни одного?

Не имея здесь возможности рассмотреть детально все эти вопросы, отсылаем читателя к специальной литературе [7], а здесь ограничиваемся рассмотрением некоторых примеров.

**Примеры.** 1. Найти решение уравнения

$$\mu y' = -y(x) + \int_0^1 sy(s)ds + 1, \quad y|_{x=0} = y^0 \quad (10.59)$$

и исследовать его при  $\mu \rightarrow 0$ .

Дифференцируя, имеем  $\mu y'' = -y'$ , откуда  $y = C_1 e^{-\frac{x}{\mu}} + C_2$ .

В качестве дополнительных условий для определения  $C_1, C_2$  будем использовать начальное условие (10.59) и начальное условие, получаемое из уравнения (10.59) и имеющее вид  $\mu y'|_{x=0} = -y^0 + \int_0^1 sy(s)ds + 1$ . Подставляя  $y = C_1 e^{-\frac{x}{\mu}} + C_2$  в эти условия, получим два уравнения для определения  $C_1, C_2$ , найдя которые, получим окончательное выражение для  $y$

$$y(x, \mu) = \frac{(y^0 - 2)e^{-\frac{x}{\mu}}}{1 + 2\mu(e^{-\frac{1}{\mu}} + \mu e^{-\frac{1}{\mu} - \mu})} + \frac{2 + 2\mu y^0(e^{-\frac{1}{\mu}} + \mu e^{-\frac{1}{\mu} - \mu})}{1 + 2\mu(e^{-\frac{1}{\mu}} + \mu e^{-\frac{1}{\mu} - \mu})}. \quad (10.60)$$

Найдем теперь из (10.58)  $\bar{y}_0(x)$  и  $\Pi_0$ . Имеем  $\bar{y}_0(x) = \int_0^1 s \bar{y}_0(s) ds + 1$ , откуда  $\bar{y}_0(x) = 2$ . Имеем также  $\frac{d\Pi_0}{d\xi} = -\Pi_0$ ,  $\Pi_0(0) = y^0 - 2$ , откуда  $\Pi_0 = (y^0 - 2)e^{-\frac{x}{\mu}}$ .

Нетрудно усмотреть из вида точного решения (10.60), что  $y(x, \mu) = \bar{y}_0(x) + \Pi_0\left(\frac{x}{\mu}\right) + O(\mu)$ , т. е. для данного уравнения (10.59) с оператором типа Фредгольма теорема 10.3 оказывается справедливой.

На данном примере можно убедиться в важности условия устойчивости (10.41), которое здесь выполнено. Но если бы при  $y(x)$  справа в (10.59) был коэффициент  $+1$ , т. е. было  $A(x) > 0$ , то в решении появилась бы растущая экспонента и представление (10.44) потеряло бы смысл.

2. Решить уравнение

$$\mu y' = -y(x) + 3 \int_0^1 x s y(s) ds, \quad y|_{x=0} = y^0 \quad (10.61)$$

и исследовать решение при  $\mu \rightarrow 0$ .

Имеем  $\mu y' = -y + \beta x$ ,  $\beta = 3 \int_0^1 s y(s) ds$ . Отсюда  $y = C e^{-\frac{x}{\mu}} + \beta x - \beta \mu$ .

Постоянные  $C$  и  $\beta$  определяются из уравнений  $y^0 = C - \beta \mu$ ,  $\beta = 3 \int_0^1 s (C e^{-\frac{s}{\mu}} + \beta s - \beta \mu) ds$

и для них получаются выражения  $C = y^0 + O(\mu^2)$ ,  $\beta = O(\mu)$ .

Следовательно, решение задачи (10.61) имеет вид

$$y(x, \mu) = [y^0 + O(\mu^2)] e^{-\frac{x}{\mu}} + O(\mu).$$

При  $\mu \rightarrow 0$   $y(x, \mu)$  имеет пределом  $\bar{y}_0 \equiv 0$ . Это одно из решений вырожденного уравнения (которое имеет семейство решений  $y = Cx$ , так как  $\lambda = 3$  является собственным значением ядра  $K(x, s) = xs$ ).

3. Преобразуем уравнение (10.61), сделав его неоднородным:

$$\mu y' = -y(x) + 3 \int_0^1 x s y(s) ds + 1, \quad y|_{x=0} = y^0.$$

Тогда  $y = Ce^{-\frac{x}{\mu}} + \beta x + (1 - \mu\beta)$ ,  
причем

$$y^0 = C + 1 - \mu\beta, \quad \beta = 3 \int_0^1 s(Ce^{-\frac{s}{\mu}} + \beta s + 1 - \mu s) ds,$$

откуда  $C = y^0 + O(\mu^2)$ ,  $\beta = \frac{1 + O(\mu^2)}{\mu}$  и решение имеет вид

$$y(x, \mu) = [y^0 + O(\mu)]e^{-\frac{x}{\mu}} + \frac{1 + O(\mu^2)}{\mu} x + O(\mu^2).$$

При  $\mu \rightarrow 0$  это решение имеет полюс по  $\mu$  (второе слагаемое). Это связано с тем, что в данном случае вырожденное уравнение не имеет решения, поскольку „1“ не ортогональна собственной функции  $x$ .

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 4-е изд. — М.: Наука, 1981.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
3. Краснов М. П. Интегральные уравнения. Введение в теорию. — М.: Наука, 1975.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. 6-е изд. — М.: Наука, 1974.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. — М.: Наука, 1979.

### Дополнительная и цитированная литература

6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1962.
7. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
8. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие. — Киев, Наукова думка, 1986.
9. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976.
10. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. — М.: Наука, 1971.
11. Гласко В. Б., Заикин П. Н. О программе регуляризирующего алгоритма для уравнения Фредгольма первого рода // Вычислительная математика и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1966.
12. Гончарский А. В. Обратные задачи оптики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1986. № 3. С. 59—76.
13. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1, 4-е изд. — М.: Наука, 1982.
14. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 2, 2-е изд. — М.: Наука, 1980.
15. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. 3-е изд. — М.: Наука, 1984.
16. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Интегральные уравнения, некорректные задачи и улучшение сходимости. — Минск, Наука и техника, 1984.
17. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2. 3-е изд. — М.: Высшая школа, 1981.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1965.
19. Математическая энциклопедия. Т. 1. — М.: Советская энциклопедия, 1977.
20. Математическая энциклопедия. Т. 2. — М.: Советская энциклопедия, 1979.
21. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965.
22. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной, 4-е изд. — М.: Наука, 1979.

23. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 1, 10-е изд. — М.: Наука, 1974.

24. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1986.

25. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. 2-е изд. — М.: Наука, 1985.

26. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 463 — 473.

27. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд. — М.: Наука, 1977.

28. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

29. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.

30. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. 10-е изд. — М.: Наука, 1970.

31. Шилов Г. Е. Математический анализ, специальный курс. 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1961.

- Альтернатива Фредгольма 91
- Гильберта — Шмидта теорема 46, 65, 68, 69, 145
- Келлога метод 36
- Компактная последовательность 21, 118, 121
- Корректно и некорректно поставленная задача 106
- Коши — Буняковского неравенство 17, 47
- Мерсера теорема 52
- Норма оператора 19
  - функции (вектора) 16
- Однородное уравнение 7, 31
- Оператор вполне непрерывный 21
  - непрерывный 20, 118
  - ограниченный 19
  - симметричный (самосопряженный) 23
  - Фредгольма 18, 32
- Ортонормированная система собственных функций (векторов) 29, 34
- Представимая через ядро функция 46
- Пространство метрическое 17, 106, 117
  - нормированное 16
- Ранг собственного значения 29, 64
- Разложение ядра по собственным функциям 50, 52
- Регуляризации метод (алгоритм) 113, 119, 127
  - параметр 113, 128, 129
- Резольвента 71, 76, 93, 102
- Сглаживающий функционал 113, 115
- Собственное значение 14, 31, 33
  - функция (вектор) 14, 31, 33
- Стеклова теорема 65
- Уравнение интегральное Абеля 106
  - Вольтерра 1-го рода 7, 101
  - Вольтерра 2-го рода 7, 8, 99
  - Фредгольма 1-го рода 7, 11, 106
  - Фредгольма 2-го рода 7, 12, 31, 68, 110
- Уравнение интегро-дифференциальное 115, 133
  - типа Вольтерра 137
  - типа Фредгольма 142
  - сингулярно возмущенное 146
- Фредгольма теоремы 84, 88
- Штурма—Лиувилля задача 37, 60
- Ядро интегрального уравнения 6
  - вырожденное 41
  - зависящее от разности аргументов 95, 105
  - замкнутое 62, 111
  - повторное 48
  - положительно определенное 52
  - полярное 56, 79
  - слабо-полярное 56
  - союзное 85
  - эрмитово 56
  - эрмитово-сопряженное 56

Учебное издание

*Васильева Аделаида Борисовна,  
Тихонов Николай Андреевич*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Зав. редакцией  
**Н. М. Глазкова**

Редактор  
**Р. Д. Солод**

Художественный редактор  
**Ю. М. Добрянская**

Технический редактор  
**В. В. Макарова**

Корректоры  
**В. П. Кададинская,  
Л. А. Костылева**